

Глава 3. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКИХ БАЛОЧНЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СИСТЕМ

Расчетные схемы

Перекрестные схемы широко используют в строительной механике в качестве расчетных моделей для самых различных конструкций (пространственные сквозные покрытия, фундаментные ростверки), зданий при расчете на неравномерные осадки, ветровые и сейсмические нагрузки, судовых отсеков и перекрытий, пролетных строений мостов, арочных плотин, венчающих ростверков высотных зданий, а также в приближенных расчетах ортотропных пластин и цилиндрических оболочек.

Составными частями — поперечными и продольными элементами (суперэлементами) перекрестных систем могут быть балки, рамы, фермы, арки, плоские диафрагмы или любые другие пластинчато-стержневые системы. В большинстве случаев указанные составные части перекрестных конструкций могут быть приняты в качестве парциальных систем. Методика расчета предусматривает сборку плоской или пространственной конструкции из парциальных

* Еще Релей [29] показал, что матрицы затухания, пропорциональные матрицам масс и жесткостей, удовлетворяют условиям ортогональности. В ряде работ [30, 28, 40] получено обобщение указанных свойств матрицы затухания.

систем не традиционным путем составления и решения уравнений метода сил или перемещений, а способом суммирования обобщенных жесткостей. Процесс определения обобщенных жесткостей отдельных частей сооружения автоматизирован благодаря использованию метода конечных элементов и ЭВМ. Решение для всей конструкции получается с помощью простых правил. Поэтому заключительный этап расчета не требует применения вычислительной техники.

В расчетах используют парциальные системы двух видов. Для регулярных и квазирегулярных конструкций применяют парциальные системы, являющиеся их составными частями. Учет нерегулярности в структуре требует усложнения парциальных систем одного направления за счет введения упругих опор, моделирующих жесткостные характеристики систем другого направления. В более сложных случаях можно лишь получить оценку низших частот спектра.

В следующих параграфах методика расчета подробно иллюстрируется на сравнительно простых моделях балочных перекрытий. Но эта методика универсальна и может быть применена практически к любой перекрестной системе. Например, методика может быть использована для расчета собственных колебаний зданий, если предварительно решить задачу о сведении плоских двумерных элементов к эквивалентным по динамическим свойствам балкам, работающим на изгиб и сдвиг (см. главу 4). При этом парциальные системы должны рассчитываться с учетом соответствующих закреплений: вертикальные с защемлением внизу, горизонтальные — как безопорные системы.

Регулярные системы с полной регулярностью

Регулярными будем называть такие перекрытия, у которых в каждом направлении балки одинаковы, находятся на равных расстояниях и имеют одинаковые закрепления. В реальных конструкциях массы непрерывно распределены по длине балок обоих направлений. Моделируя конструкцию дискретными расчетными схемами, необходимо массы сосредоточить в конечном числе точек. Удобно за эти точки принять узлы пересечения балок одного и другого направлений. Тогда в соответствии с результатами, полученными в предыдущей главе, частоты собственных колебаний перекрытия можно определять по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda_A}{M} + \frac{\lambda_B}{M}}, \quad (3.1)$$

где λ_A и λ_B — собственные числа матриц жесткости балок одного и другого направлений; M — узловая (сосредоточенная) масса.

Учитывая эквивалентность решений статической и динамической задач:

$$[A]\{V\} = \lambda_A [I]\{V\}; \quad [A]\{V\} = M\omega_A^2 [I]\{V\}, \quad (3.2)$$

независимо от величины сосредоточенной массы M , получаем равенство

$$\lambda_A = M\omega_A^2, \quad (3.3)$$

позволяющее трактовать произведение $M\omega_A^2$ как собственное число матриц жесткости. Зависимость (3.3) дает возможность получать собственные числа матриц по известным частотам собственных колебаний дискретных парциальных систем.

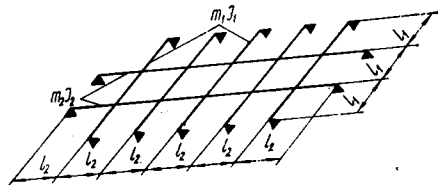


Рис. 3.1. Расчетная схема балочного перекрытия.

Величины приведенных масс M , входящие в формулу (3.1), определяются из условия равночастотности балок с распределенными и сосредоточенными массами. Тогда приведенная масса парциальной системы может быть определена по формуле

$$M_A^{(i)} = \frac{\lambda_A^{(i)}}{\tilde{\omega}_A^{(i)2}}, \quad (3.4)$$

где $\tilde{\omega}_A^{(i)2}$ — частота собственных колебаний балки с распределенной массой.

Формы собственных колебаний перекрытия определяются путем перемножения вектора-столбца на вектор-строку, являющихся формами колебаний парциальных систем.

$$[W^{(i,j)}] = \{V_A^{(i)}\} \cdot \{V_B^{(j)}\}. \quad (3.5)$$

Шарнирное закрепление на опорах. В качестве примера возьмем простую перекрестную систему, состоящую из пяти поперечных и двух продольных балок (рис. 3.1). Учитываются только деформации изгиба (сдвигом и кручением пренебрегаем).

Исходные данные:

$EI_1 = EI_2 = EI = 20,594 \text{ МПа} \cdot \text{м}^4$; $m_1 = m_2 = m = 9,8066 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1}$ — изгибные жесткости и погонные массы обоих направлений; $l_1 = 1,33 \text{ м}$, $l_2 = 1 \text{ м}$ — расстояние между балками одного и другого направлений; $l = 3l_1 = 4 \text{ м}$, $L = 6l_2 = 6 \text{ м}$ — длина и ширина перекрытия.

В работе [25] получена точная формула для определения частот собственных колебаний невесомой шарнирно-опертой балки с сосредоточенными массами

$$\omega^{(v)2} = \frac{12EI}{MI^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{v\pi}{k+1} - 1\right)^2}{\cos \frac{v\pi}{k+1} + 2}, \quad (3.6)$$

где v — номер формы собственных колебаний; k — число узлов; l — расстояние между узлами.

Умножив левую и правую части зависимости (3.6) на величину сосредоточенной массы M , получим формулу для определения обоб-

ценных парциальных жесткостей (собственных чисел матрицы жесткости):

$$\lambda^{(\nu)} = M \omega^{(\nu)^2} = \frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\nu\pi}{k+1} - 1 \right)^2}{\cos \frac{\nu\pi}{k+1} + 2}. \quad (3.7)$$

Определим первые шесть частот собственных колебаний. Разделим перекрытие на две парциальные системы, каждая из которых представляет выделенные из него балки одного и второго направлений. Обобщенные жесткости для парциальных систем определим с помощью (3.7):

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{12EI}{l_1^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - 1 \right)^2}{\cos \frac{\pi}{3} + 1} = \frac{12 \cdot 20,594 \cdot 10^3}{1,33^3} \times \frac{(0,5 - 1)^2}{0,5 + 2} = 10,511 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{12EI}{l_1^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{3} - 1 \right)^2}{\cos \frac{2\pi}{3} + 2} = \frac{12 \cdot 20,594 \cdot 10^3}{1,33^3} \times \frac{(-0,5 - 1)^2}{-0,5 + 2} = 157,665 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{12EI}{l_2^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6} - 1 \right)^2}{\cos \frac{\pi}{6} + 2} = \frac{12 \cdot 20,594 \cdot 10^3}{1^3} \times \frac{(0,866 - 1)^2}{0,866 + 2} = 1,547 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(2)} = \frac{12EI}{l_4^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{6} - 1 \right)^2}{\cos \frac{2\pi}{6} + 2} = \frac{12 \cdot 20,594 \cdot 10^3}{1^3} \times \frac{(0,5 - 1)^2}{0,5 + 2} = 24,713 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(3)} = \frac{12EI}{l_4^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{3\pi}{6} - 1 \right)^2}{\cos \frac{3\pi}{6} + 2} = \frac{12 \cdot 20,594 \cdot 10^3}{1^3} \times \frac{(0 - 1)^2}{0 + 2} = 123,514 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Частоты собственных колебаний двух парциальных систем с распределенными массами:

$$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}} \quad (i = 1, 2, 3 \dots); \quad (3.8)$$

$$\tilde{\omega}_2^{(j)} = \frac{j^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_2}{m_2}} \quad (j = 1, 2, 3 \dots); \quad (3.9)$$

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = \frac{1^2 \cdot 3,14}{4^2} \sqrt{\frac{20,594 \cdot 10^3}{9,8066}} = 28,24 \text{ с}^{-1};$$

$$\tilde{\omega}_1^{(2)} = 4\omega_1^{(1)} = 112,96 \text{ с}^{-1};$$

$$\tilde{\omega}_2^{(1)} = \frac{1^2 \cdot 3,14}{6^2} \sqrt{\frac{20,594 \cdot 1,0^3}{9,8066}} = 12,55 \text{ с}^{-1};$$

$$\tilde{\omega}_2^{(2)} = 4\tilde{\omega}_2^{(1)} = 50,2 \text{ с}^{-1}; \quad \tilde{\omega}_2^{(3)} = 9\tilde{\omega}_2^{(1)} = 112,95 \text{ с}^{-1}.$$

Используя (3.4), получим значения узловых приведенных масс:

$$M_1^{(1)} = \frac{10,5 \cdot 10^3}{28,24^2} = 13,166 \text{ т}; \quad M_1^{(2)} = \frac{157,665 \cdot 10^3}{112,96^2} = 12,356 \text{ т};$$

$$M_2^{(1)} = \frac{1,54 \cdot 10^3}{12,55^2} = 9,77 \text{ т}; \quad M_2^{(2)} = \frac{24,713 \cdot 10^3}{50,2^2} = 9,8 \text{ т};$$

$$M_2^{(3)} = \frac{123,564 \cdot 10^3}{112,95^2} = 9,69 \text{ т}.$$

Первые шесть частот собственных колебаний перекрытия определяем по формуле

$$\omega_{i,j} = \sqrt{\frac{\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(j)}}{M_1^{(i)} + M_2^{(j)}}} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3); \quad (3.10)$$

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{10,511 \cdot 10^3 + 1,547 \cdot 10^3}{13,166 + 9,77}} = 22,93 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{10,511 \cdot 10^3 + 24,713 \cdot 10^3}{13,166 + 9,8}} = 39,16 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{1,3} = \sqrt{\frac{10,511 \cdot 10^3 + 123,514 \cdot 10^3}{13,166 + 9,69}} = 76,59 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,1} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 1,547 \cdot 10^3}{12,356 + 9,77}} = 84,83 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,2} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 24,713 \cdot 10^3}{12,356 + 9,8}} = 90,73 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 123,514 \cdot 10^3}{12,356 + 9,69}} = 112,95 \text{ с}^{-1}.$$

Входящие в формулу (3.10) значения узловой приведенной массы M можно определить пропорционально грузовым площадям:

$$\tilde{M}_1 = ml_1 = 9,0866 \cdot 1,33 = 13,0428 \text{ т}; \quad \tilde{M}_2 = ml_2 = 9,0866 \cdot 1 = 9,0966 \text{ т}.$$

После подстановки определенных величин в (3.10):

$$\omega_{1,2} = 22,97 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,2} = 39,26 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,3} = 76,59 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,1} = 83,47 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,2} = 89,34 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,3} = 110,93 \text{ с}^{-1};$$

Сравнение вычисленных двумя способами частот показывает, что дискретизация масс по грузовым площадям дает приемлемую для практики точность.

Решение в форме (3.1) является строгим для дискретной модели с сосредоточенными массами. Выясним возможность практического применения метода парциальных жесткостей для расчета континуальной модели. Частоты собственных колебаний:

$$\omega_{i,l} = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^{(i,l)}}{\Sigma m}} = \sqrt{\frac{d l \lambda_1^{(i)} + n L \lambda_2^{(i)}}{d l m_1 + n L m_2}}, \quad (3.11)$$

где $\Sigma \lambda^{(i,l)}$, Σm — соответственно обобщенная жесткость и масса всей системы; d , n — число балок в поперечном и продольном направлениях; $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$ — погонные обобщенные жесткости.

Погонные обобщенные жесткости парциальных систем выражаются через парциальные частоты следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= m_1 \tilde{\omega}_1^{(1)2}; & \lambda_1^{(1)} &= 6,0866 \cdot 28,24^2 = 7,8207 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_1^{(2)} &= 16 \lambda_1^{(1)} = 1,2513 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(1)} &= 9,0866 \cdot 12,55^2 = 1,5446 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(2)} &= 16 \lambda_2^{(1)} = 2,4714 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(3)} &= 81; & \lambda_2^{(3)} &= 1,2511 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Частоты собственных колебаний парциальных систем были вычислены ранее по формулам (3.8) и (3.9).

Суммарная обобщенная жесткость и масса перекрытия:

$$\Sigma \lambda^{(1,1)} = 5 l \lambda_1^{(1)} + 2 L \lambda_2^{(1)} = 5 \cdot 4 \cdot 7,8207 \cdot 10^3 + 2 \cdot 6 \cdot 1,5446 \cdot 10^3 = 1,7495 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma \lambda^{(1,2)} = 5 l \lambda_1^{(1)} + 2 L \lambda_2^{(2)} = 5 \cdot 4 \cdot 7,8207 \cdot 10^3 + 2 \cdot 6 \cdot 2,4714 \cdot 10^4 = 4,5298 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma \lambda^{(1,3)} = 5 l \lambda_1^{(1)} + 2 L \lambda_2^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 7,8207 \cdot 10^3 + 2 \cdot 6 \cdot 1,2511 \cdot 10^5 = 16,5773 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma \lambda^{(2,1)} = 5 l \lambda_1^{(2)} + 2 L \lambda_2^{(1)} = 5 \cdot 4 \cdot 1,2513 \cdot 10^5 + 2 \cdot 6 \cdot 1,5446 \cdot 10^3 = 25,2114 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma \lambda^{(2,2)} = 5 l \lambda_1^{(2)} + 2 L \lambda_2^{(2)} = 5 \cdot 4 \cdot 1,2513 \cdot 10^5 + 2 \cdot 6 \cdot 2,4714 \cdot 10^4 = 27,9917 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma \lambda^{(2,3)} = 5 l \lambda_1^{(2)} + 2 L \lambda_2^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 1,2513 \cdot 10^5 + 2 \cdot 6 \cdot 1,2511 \cdot 10^5 = 40,0392 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\Sigma m = 5 l m_1 + 2 L m_2 = 5 \cdot 4 \cdot 9,0866 + 2 \cdot 6 \cdot 9,0866 = 3,1381 \cdot 10^2 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний определяем по формуле (3.11):

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{1,7495 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^2}} = 23,61 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{4,5298 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^2}} = 37,99 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{1,3} = \sqrt{\frac{16,5773 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^2}} = 72,68 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,1} = \sqrt{\frac{25,2114 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^2}} = 89,63 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,2} = \sqrt{\frac{27,9917 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^8}} = 94,44 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{40,0392 \cdot 10^5}{3,1381 \cdot 10^8}} = 112,95 \text{ с}^{-1}.$$

Результаты трех расчетов согласуются между собой.

Для вычисления собственных векторов перекрестной системы воспользуемся формулой (3.5). Особенность рассмотренного типа регулярного перекрытия заключается в том, что формами собственных колебаний в обоих направлениях являются синусы для дискретной и континуальной расчетной моделей. Поэтому ординаты собственных векторов парциальных систем совпадают для всех узлов продольных и поперечных балок.

Формы собственных колебаний $[W^{(i,j)}]$ перекрытия (в точках пересечения продольных и поперечных балок) получим в виде произведения вектора-столбца на вектор-строку

$$[W^{(i,j)}] = \{V_1^{(i)}\} \{V_2^{(j)}\}^T,$$

где $\{V_1^{(i)}\}$, $\{V_2^{(j)}\}$ — собственные векторы парциальных систем.

Для рассматриваемого перекрытия при $i=1$, $j=1$:

$$[W^{(1,1)}] = \begin{bmatrix} W_{11}^{(1,1)} W_{12}^{(1,1)} \dots W_{15}^{(1,1)} \\ W_{21}^{(1,1)} W_{22}^{(1,1)} \dots W_{25}^{(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot [0,5 \ 0,865 \ 1,0 \ 0,865 \ 0,5] = \\ = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,865 & 1,0 & 0,865 & 0,5 \\ 0,5 & 0,865 & 1,0 & 0,865 & 0,5 \end{bmatrix}^*.$$

Для выяснения степени точности предлагаемой методики выполним ряд сопоставительных расчетов, используя метод конечных элементов, точное (аналитическое) решение для шарнирно-опертого перекрытия, а также энергетический метод.

Идеализация конструкции, т. е. ее дискретное представление в виде ансамбля конечных элементов (КЭ), наделенных определенными физическими свойствами, является наиболее ответственным этапом динамического расчета, от которого зависит достоверность и практическая ценность результирующей информации.

В расчетах, которые будут приведены ниже, использовалась программа, разработанная Э. П. Лукашом в Одесском институте инженеров морского флота (см. главу 1). В ней предусмотрена возможность одновременного использования различных типов КЭ, входящих в программную библиотеку. Это позволяет построить для отдельных элементов конструкции (плоские рамы многоэтажных зданий, стены, сплошные диски перекрытий) достаточно подробную физическую модель в виде пластинчато-стержневой системы.

Для решения обобщенного частотного уравнения используется итерационная процедура анализа знакоперемен канонической квадратичной формы, к которой приводится результирующая система с помощью прямого хода по Гауссу. Выполняя обратный ход, определяются формы собственных частот колебаний.

* Ординаты вектора $\{V_1^{(i)}\}$ нормированы.

В общем случае для расчета плоского балочного перекрытия (рис. 3.2) используются конечные элементы в виде стержней, работающих на изгиб и кручение. Поскольку в предыдущих расчетах кручение балок не учитывалось, в расчетах по МКЭ также были исключены соответствующие степени свободы.

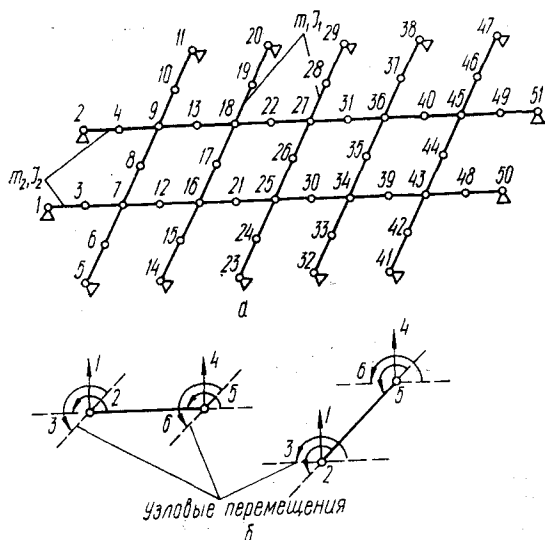


Рис. 3.2. Схема идеализации перекрытия для расчета по МКЭ (а) и элементы дискретизации (б).

Частоты собственных колебаний этого перекрытия:

$$\omega_{1,1} = 23,03 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,2} = 39,51 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,3} = 76,79 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,1} = 85,14 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,2} = 91,49 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,3} = 113,7 \text{ с}^{-1}.$$

Первая форма собственных колебаний перекрытия (в точках пересечения продольных и поперечных балок):

$$[W^{(1,1)}] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,865 & 1,0 & 0,865 & 0,5 \\ 0,5 & 0,865 & 1,0 & 0,865 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Точное решение для непрерывно дискретной схемы (массы распределенные, а соединение балок в конечном числе узлов) может быть получено путем решения частотного уравнения, имеющего следующий вид:

$$f_{1A}(\omega) + f_{2A}(\omega) + f_{1B}(\omega) + f_{2B}(\omega) = 0, \quad (3.12)$$

где $f_{1A}(\omega)$, $f_{2A}(\omega)$, $f_{1B}(\omega)$, $f_{2B}(\omega)$ — некоторые гиперболо-тригонометрические функции для балок одного (A) и другого (B) направлений [25].

Решая уравнения (3.12) для рассмотренного выше примера, получим значения частот:

$$\omega_{1,1} = 23,85 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,2} = 37,65 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,3} = 71,15 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,1} = 90,25 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,2} = 95,05 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,3} = 113,05 \text{ с}^{-1}.$$

В точном решении формами собственных колебаний перекрытий в обоих направлениях являются синусы. Матрица форм для первой частоты

$$[W^{(1,1)}] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,866 & 1,0 & 0,866 & 0,5 \\ 0,5 & 0,866 & 1,0 & 0,866 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Частоты собственных колебаний вычислены также энергетическим методом, используя следующее уравнение:

$$\Pi_{\max} = K_{\max}, \quad (3.13)$$

$$\text{где } \Pi_{\max} = \frac{EI_1}{2} \sum_{r=1}^d \int W_r'^2(x) dx + \frac{EI_2}{2} \sum_{p=1}^n W_p'^2(y) dy;$$

$$K_{\max} = \frac{\omega^2 m}{2} \sum_{r=1}^d \int W_r^2(x) dx + \frac{\omega^2 m}{2} \sum_{p=1}^n W_p^2(y) dy;$$

$$W_r(x) = \sin \frac{i\pi y_r}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x}{l}; \quad W_p(y) = \sin \frac{i\pi x_p}{l} \cdot \sin \frac{j\pi y}{L}.$$

Расчеты по энергетическому методу дали следующие результаты:

$$\omega_{11} = 23,61 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{12} = 38,02 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{13} = 72,74 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{21} = 89,63 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{22} = 94,46 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{23} = 113,05 \text{ с}^{-1}.$$

Значения частот, полученных различными методами, приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ п. п.	Метод расчета	Модель	Дискретизация масс	Частоты колебаний, с ⁻¹					
				$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$	$\omega_{2,3}$
1	Парциальных жесткостей	Дискретная	По условию равночастотности	22,98	39,16	76,59	84,83	90,73	112,95
2	То же	То же	По грузовым площадям	22,97	39,26	76,59	83,47	89,34	110,93
3	"	Континуальная	Массы равномерно распределены	23,61	37,99	72,68	89,63	94,44	112,95
4	Конечных элементов	Дискретная	С использованием согласованной матрицы масс	23,03	39,51	76,79	85,14	91,49	113,7
5	Точный (аналитический)	Континуально-дискретная	Массы равномерно распределены	23,85	37,65	71,15	95,25	95,05	113,05
6	Энергетический	То же	То же	23,61	38,02	72,74	89,63	94,46	113,05

Анализ результатов сопоставительных расчетов позволяет сделать следующие выводы.

Метод парциальных жесткостей позволяет определять динамические характеристики перекрестных систем с достаточной для практики точностью.

Дискретизация масс может выполняться по способу равночастотности или по способу грузовых площадей, причем, при числе балок каждого направления равном и более пяти оба способа приводят к одинаковым решениям.

Метод парциальных жесткостей может быть применен к расчету регулярных непрерывно-дискретных перекрестных систем, когда число балок в каждом направлении больше двух.

В следующих параграфах выясним применимость этих выводов к другим типам перекрестных систем.

Жесткие закрепления на опорах. В предыдущем параграфе обобщенные жесткости парциальных систем определялись по формулам. В общем случае парциальными системами могут быть рамы, фермы, арки и т. д. Аналитических решений для определения обобщенных жесткостей таких сложных конструкций не существует, и тогда парциальные системы приходится рассчитывать с помощью численных методов.

Парциальными системами служат поперечные и продольные балки, нагруженные сосредоточенными массами в местах пересечения. Воспользуемся примером, приведенным на с. 40, изменив лишь граничные условия (рис. 3.3).

Узловые обобщенные жесткости равны произведению величины сосредоточенной массы на квадрат частот собственных колебаний парциальной системы. Это произведение не зависит от величины сосредоточенной массы и характеризует, следовательно, только жесткостные свойства системы.

Динамические характеристики парциальных систем определяем с помощью МКЭ.

Частоты собственных колебаний поперечной балки, нагруженной в узлах сосредоточенными массами $M_1 = 19,61$ т:

$$\omega_1^{(1)} = 51,92 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(1)} = 118,0 \text{ с}^{-1}.$$

То же для продольной балки ($M_2 = 11,78$ т):

$$\omega_2^{(1)} = 26,14 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(2)} = 71,64 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(3)} = 137,3 \text{ с}^{-1}.$$

Узловые обобщенные жесткости:

$$\lambda_1^{(i)} = M_1 \omega_1^{(i)2}; \quad \lambda_2^{(j)} = M_2 \omega_2^{(j)2} \quad \begin{matrix} i = 1, 2; \\ j = 1, 2, 3; \end{matrix}$$

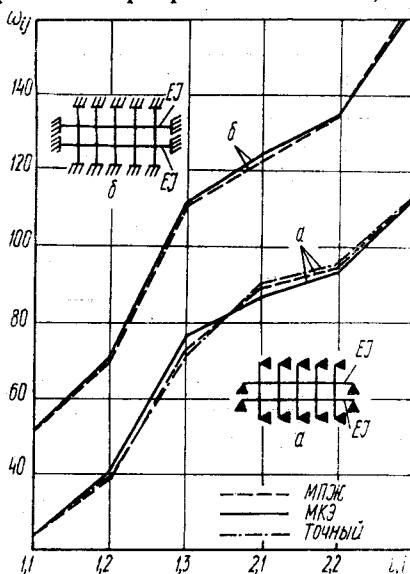


Рис. 3.3. Сравнение различных методов расчета (схемы а и б).

$$\lambda_1^{(1)} = 5,28732 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_1^{(2)} = 2,73189 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(1)} = 8,04133 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(2)} = 6,03988 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(3)} = 2,21917 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Таблица 3.2

Метод	Частоты, с^{-1}						Погрешность (средняя), проп.
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$	$\omega_{2,3}$	
ПЖ	51,71	70,68	111,14	122,75	134,09	165,26	0,46
КЭ	51,72	70,82	110,8	123,8	135,1	164,1	

Узловые приведенные массы:

$$M_1^{(i)} = \frac{\lambda_1^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)^2}}; \quad M_2^{(j)} = \frac{\lambda_2^{(j)}}{\tilde{\omega}_2^{(j)^2}},$$

где $\tilde{\omega}_1^{(i)}$, $\tilde{\omega}_2^{(j)}$ — частоты собственных колебаний соответственно поперечной и продольной балок с распределенными массами, определяемые по формулам:

$$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \frac{\kappa_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}}; \quad (3.15)$$

$$\tilde{\omega}_2^{(j)} = \frac{\kappa_j^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_2}{m_2}}, \quad (3.16)$$

где $\kappa_1 = 4,730041$; $\kappa_2 = 7,853205$; $\kappa_3 = 14,137165$.

Значения частот (для $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$)

$$\omega_1^{(1)} = 64,08 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1^{(2)} = 176,64 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(1)} = 28,48 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2^{(2)} = 78,51 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(3)} = 153,90 \text{ с}^{-1};$$

$$M_1^{(1)} = 12,876 \text{ т}; \quad M_1^{(2)} = 8,755 \text{ т}; \quad M_2^{(1)} = 9,913; \quad M_2^{(2)} = 9,798 \text{ т};$$

$$M_2^{(3)} = 9,369 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний перекрытия:

$$\omega_{1,1} = 51,71 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,2} = 70,68 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{1,3} = 111,14 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2,1} = 122,75 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,2} = 134,09 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{2,3} = 165,26 \text{ т}^{-1}.$$

Сравнение методов расчета дано в табл. 3.2 и на рис. 3.3.

Формы собственных колебаний:

по МПЖ

$$[W^{(1,1)}] = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} [0,27 \ 0,77 \ 1,0 \ 0,77 \ 0,27] = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,77 & 1,0 & 0,77 & 0,27 \\ 0,27 & 0,77 & 1,0 & 0,77 & 0,27 \end{bmatrix};$$

по МКЭ

$$[W^{(1,1)}] = \begin{bmatrix} 0,29 & 0,78 & 1,0 & 0,78 & 0,29 \\ 0,29 & 0,78 & 1,0 & 0,78 & 0,29 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся приближенной методикой расчета континуальной модели, разработанной ранее.

Погонные обобщенные жесткости:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(j)} &= m \tilde{\omega}_1^{(j)2}; & \lambda_2^{(j)} &= m \tilde{\omega}_2^{(j)2}; & \lambda_1^{(1)} &= 4,02674 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_1^{(2)} &= 3,06089 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; & \lambda_2^{(1)} &= 7,95496 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(2)} &= 6,04486 \cdot 10^{-4} \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; & \lambda_2^{(3)} &= 2,32352 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \end{aligned}$$

Таблица 3.3

Метод	Частоты колебаний, с ⁻¹					
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$	$\omega_{2,3}$
ПЖ	53,58	69,84	107,0	140,75	147,69	168,47
КЭ	51,72	70,82	110,9	123,8	135,1	164,1

Частоты собственных колебаний перекрытия

$$\omega_{i,j} = \sqrt{\frac{dI\lambda_1^{(i)} + nL\lambda_2^{(j)}}{m_i Id + m_2 Ln}}$$

Частоты, вычисленные по этой формуле и по МКЭ, приведены в табл. 3.3.

Лучшая сходимость метода получается при $i=1$ и $j=1, 2, 3$. Точность определения частот повышается при увеличении числа балок продольного направления с двух до пяти.

Регулярные системы с различным опиранием

Выше были рассмотрены типы перекрестных систем с полной регулярностью в каждом направлении по геометрии, жесткости, инерционным характеристикам, а также по условиям закрепления на опорах.

В данном параграфе будут рассмотрены случаи нарушения регулярности по граничным условиям. Однако и в этом случае метод парциальных жесткостей должен приводить к практически точным решениям.

Рассчитаем плоское балочное перекрытие, у которого продольные балки жестко закреплены, а поперечные — шарнирно опорты. Узловые обобщенные жесткости первой парциальной системы — поперечных балок определяются по формуле (3.7):

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \frac{12EI_1}{I_1^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - 1\right)^2}{\cos \frac{\pi}{3} + 2} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 594 \cdot 10^3}{1,33^3} \cdot \frac{(0,5 - 1)^2}{0,5 + 2} = \\ &= 1,7665 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \end{aligned}$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{12EI_1}{l_1^3} \cdot \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{3} - 1\right)^2}{\cos \frac{2\pi}{3} + 2} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 594 \cdot 10^3}{1,33^3} \cdot \frac{-0,5 - 1)^2}{-0,5 + 2} =$$

$$= 15,7665 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Узловые обобщенные жесткости второй парциальной системы продольных балок вычислены ранее:

$$\lambda_2^{(1)} = 8,04133 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(2)} = 6,03988 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(3)} = 2,21917 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Таблица 3.4

Метод	Частота, с ⁻¹						Погрешность (средняя), проц.
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{2,3}$	
ПЖ	28,38	55,6	84,75	97,5	101,5	129,85	1,32
КЭ	28,53	55,69	86,93	100,1	101,1	132,1	

Узловые приведенные массы поперечных и продольных балок равны (см. с. 42, 48).

$$M_1^{(1)} = M_1^{(2)} = \mu \frac{ml}{2} = 0,67 \cdot \frac{9,8066 \cdot 4}{2} = 13,1408 \text{ т};$$

$$M_2^{(1)} = 9,913 \text{ т}; \quad M_2^{(2)} = 9,798 \text{ т}; \quad M_2^{(3)} = 9,369 \text{ т}.$$

Частоты колебаний определяем по формуле (3.10):

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{10,5116 \cdot 10^3 + 8,04133 \cdot 10^3}{13,1408 + 9,913}} = 28,38 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{10,5116 \cdot 10^3 + 6,03988 \cdot 10^4}{13,1408 + 9,798}} = 55,6 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{21} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 8,04133 \cdot 10^3}{13,1408 + 9,913}} = 84,75 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 6,03988 \cdot 10^4}{13,1408 + 9,369}} = 97,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{13} = \sqrt{\frac{10,5116 \cdot 10^3 + 22,1917 \cdot 10^4}{13,1408 + 9,369}} = 101,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{23} = \sqrt{\frac{157,665 \cdot 10^3 + 22,1917 \cdot 10^4}{13,1408 + 9,369}} = 129,85 \text{ с}^{-1}.$$

Сравнение методов расчета дано в табл. 3.4.

Рассмотрим перекрестную систему, балки которой имеют смешанные закрепления по концам. Парциальными системами являются выделенные из перекрытия поперечные и продольные балки. Загрузим их, как и раньше, сосредоточенными массами $M_1=19,61$ т (поперечные балки) и $M_2=11,78$ т (продольные балки). Частоты собственных колебаний, вычисленные по МКЭ:

$$\omega_1^{(1)} = 35,86 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1^{(2)} = 106,0 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(1)} = 17,92 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_2^{(2)} = 57,77 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(3)} = 118,8 \text{ с}^{-1}.$$

Таблица 3.5

Метод	Частоты, с ⁻¹						Погрешность (средняя), проц.
	ω_{11}	ω_{12}	ω_{23}	ω_{31}	ω_{22}	ω_{23}	
ПЖ	35,7	53,38	92,51	104,37	112,61	138,34	0,54
КЭ	35,83	53,63	92,46	105,4	113,7	138,9	

Узловые обобщенные жесткости парциальных систем:

$$\lambda_1^{(i)} = M_1 \omega_1^{(i)2}; \quad \lambda_2^{(j)} = M_2 \omega_2^{(j)2} \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3); \quad (3.17) \\ \lambda_1^{(1)} = 2,52173 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_1^{(2)} = 2,20338 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(1)} = 3,78287 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(2)} = 3,93143 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \\ \lambda_2^{(3)} = 1,66256 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Узловые приведенные массы:

$$M_1^{(i)} = \frac{\lambda_1^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)}}; \quad M_2 = \frac{\lambda_2^{(j)}}{\tilde{\omega}_2^{(j)}}, \quad (3.18)$$

где

$$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \frac{\kappa_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}}; \quad \tilde{\omega}_2^{(j)} = \frac{\kappa_j^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_2}{m_2}}; \quad (3.19)$$

$$\kappa_1 = 3,92660; \quad \kappa_2 = 7,06858; \quad \kappa_3 = 10,21018.$$

Значения частот (по формуле (3.9)) и узловых приведенных масс:

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = 44,16 \text{ с}^{-1}; \quad \tilde{\omega}_1^{(2)} = 143,11 \text{ с}^{-1}; \quad \tilde{\omega}_2^{(1)} = 19,63 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_2^{(2)} = 63,6 \text{ с}^{-1}; \quad \tilde{\omega}_2^{(3)} = 132,7 \text{ с}^{-1}; \\ M_1^{(1)} = 12,9312 \text{ т}; \quad M_1^{(2)} = 10,7584 \text{ т}; \quad M_2^{(1)} = 9,8171 \text{ т}; \\ M_2^{(2)} = 9,7193 \text{ т}; \quad M_2^{(3)} = 9,4415 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний перекрытия определены по формуле (3.13). Сравнение частот, вычисленных по МПЖ и МКЭ, дано в табл. 3.5.

Системы с геометрической нерегулярностью

Рассмотрим два примера. В качестве первого возьмем шарнирно-опертое перекрытие (см. рис. 3.1), из которого удалим крайнюю поперечную балку (рис. 3.4).

Первая парциальная система представляет невесомую поперечную балку, загруженную в узлах пересечения с продольными балками одинаковыми сосредоточенными массами ($M=19,61$ т). Изменение в структуре перекрытия учитывается расчетом второй парциальной системы — продольной балки с четырьмя сосредоточенными массами ($M_2=11,78$ т, в пятой узловой точке сосредоточенной массы нет).

Узловые обобщенные жесткости равны произведению сосредоточенных масс на квадраты частот собственных колебаний:

$$\lambda_1^{(1)} = 1,04369 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_1^{(2)} = 1,54853 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(1)} = 0,16907 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(2)} = 3,23327 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(3)} = 1,90898 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Узловые приведенные массы:

$$M_1^{(i)} = \frac{\lambda_1^{(i)}}{\tilde{\omega}_1^{(i)^2}}; \quad M_2^{(j)} = \frac{\lambda_2^{(j)}}{\tilde{\omega}_2^{(j)^2}},$$

где

$$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}}; \quad \tilde{\omega}_2^{(j)} = \frac{j^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_2}{m_2}} \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3);$$

$$M_1^{(1)} = 13,0672 \text{ т}; \quad M_1^{(2)} = 12,1354 \text{ т}; \quad M_2^{(1)} = 10,7343 \text{ т};$$

$$M_2^{(2)} = 12,8321 \text{ т}; \quad M_2^{(3)} = 14,9633 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний перекрытия определены по формуле (3.13). Сравнение результатов расчетов по МПЖ и МКЭ дано в табл. 3.6 и на рис. 3.4.

Таблица 3.6

Метод	Частота, с^{-1}						Погрешность (средняя), проц.
	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	ω_{32}	
МПЖ	22,56	40,62	82,73	84,72	86,59	112,95	1,45
МКЭ	22,67	41,01	79,02	85,28	88,2	113,8	

Второй пример отличается от первого тем, что в перекрытии оставлена одна продольная балка. Теперь и в первой парциальной системе отсутствует одна сосредоточенная масса.

Узловые обобщенные жесткости и приведенные массы в этом примере составляют:

$$\lambda_1^{(1)} = 1,96562 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(1)} = 0,16909 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(2)} = 3,23327 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(3)} = 1,90898 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$M_1^{(1)} = 24,6473 \text{ т}; \quad M_2^{(1)} = 10,7346 \text{ т};$$

$$M_2^{(2)} = 12,8304 \text{ т}; \quad M_2^{(3)} = 14,9633 \text{ т}.$$

Частоты перекрытия:

$$\omega_{11} = 24,56 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{12} = 37,24 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{13} = 72,9 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующие частоты перекрытия, определенные с помощью МКЭ:

$$\omega_{11} = 24,77 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{12} = 37,04 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{13} = 76,62 \text{ с}^{-1}.$$

Системы, нерегулярные в одном направлении

Шарнирное закрепление на опорах. Опишем перекрестную систему, отличающуюся от рассмотренного перекрытия тем, что жесткость одной продольной балки увеличена в 10 раз (рис. 3.5).

Выделим из перекрытия продольные балки (парциальные системы 1-го уровня) и загрузим их единичными сосредоточенными массами.

Узловые обобщенные жесткости первой продольной балки (с изгибной жесткостью EI):

$$\lambda_1^{(j)} = m_1 l_1 \tilde{\omega}_1^j = \frac{(j\pi)^4 EIl_1}{L^4}; \quad (3.20)$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{1^4 \cdot 3,14159^4 \cdot 20,594 \cdot 10^3 \cdot 1}{6^4} = 1,54787 \cdot 10^3 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

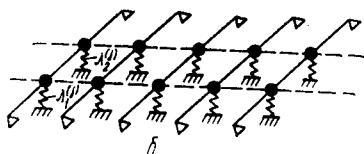
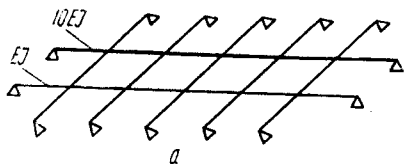
$$\lambda_1^{(2)} = 16\lambda_1^{(1)} = 2,47659 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_1^{(3)} = 81\lambda_1^{(1)} = 1,25377 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Для второй продольной балки (с изгибной жесткостью $10EI$) узловые обобщенные жесткости в 10 раз больше.

Примем жесткости $\lambda_1^{(j)}$ и $\lambda_2^{(j)}$ в виде дискретных упругих связей и присоединим их к поперечным балкам в узлах пересечения с продольными (рис. 3.5, б). Образованным таким путем новые, более сложные конфигурации — парциальные системы 2-го уровня позволяют учитывать нерегулярность конструкции в одном направлении. Они загружены в узлах пересечения балок сосредоточенными мас-

сами, соотношение между которыми зависит от загрузки массами продольных балок. В рассматриваемом примере узловые массы одинаковы $M=9,8066$ т. Величины их могут быть приняты произвольными.

Определим частоты собственных колебаний только одной пар-



циальной системы 2-го уровня, так как все они одинаковы и, следовательно, равночастотны. Используя МКЭ, удобно в расчетной схеме упругие опоры жесткостью $\lambda_1^{(j)}$ и $\lambda_2^{(j)}$ заменить стерженьками, площади поперечных сечений которых равны:

$$F_1^{(j)} = \frac{\lambda_1^{(j)} l}{E}; \quad F_2 = \frac{\lambda_2^{(j)} l}{E}. \quad (3.21)$$

Рис. 3.5. Расчетная схема нерегулярного в одном направлении перекрытия (а) и парциальные системы 2-го уровня (б).

$$F_1^{(1)} = \frac{1,54787 \cdot 10^3 \cdot 10}{20,594 \cdot 10^3} = 0,7516 \text{ м}^2;$$

$$F_1^{(2)} = 12,0265 \text{ м}^2;$$

$$F_1^{(3)} = 60,8796 \text{ м}^2; \quad F_2^{(1)} = 7,516 \text{ м}^2; \quad F_2^{(2)} = 120,256 \text{ м}^2; \quad F_1^3 = 608,796 \text{ м}^2.$$

Частоты собственных колебаний парциальных систем 2-го уровня:

$$\omega_3^{(11)} = 43,62 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3^{(12)} = 93,88 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3^{(21)} = 129,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3^{(22)} = 189,2 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3^{(13)} = 144,1 \text{ с}^{-1}.$$

Их узловые обобщенные жесткости:

$$\lambda_3^{(11)} = M\omega_3^{(11)2} = 9,8066 \cdot 43,62^2 = 1,8659 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_3^{(21)} = 1,63698 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_3^{(12)} = 8,64321 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_3^{(22)} = 3,51043 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_3^{(13)} = 2,03632 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Приведенные узловые массы вычислим «по грузовым площадям»

$$M_{\text{пр}} = m_1 l_1 + m_2 l_2 = m(1 + 1,33) = 2,33m = 2,33 \cdot 9,8066 = 22,8493 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний перекрытия:

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{hd\lambda_3^{(11)}}{hdM_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{1,8659 \cdot 10^4}{22,8493}} = 28,6 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{8,643 \cdot 10^4}{22,8493}} = 61,5 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{21} = \sqrt{\frac{1,63698 \cdot 10^5}{22,8493}} = 84,65 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{13} = \sqrt{\frac{2,03632 \cdot 10^5}{22,8493}} = 94,4 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{22} = \sqrt{\frac{3,51043 \cdot 10^5}{22,8493}} = 123,95 \text{ с}^{-1}.$$

Методы парциальных жесткостей и конечных элементов применительно к рассматриваемой задаче приведены в табл. 3.7 и на рис. 3.6, а.

Таблица 3.7

Метод	Частота, с ⁻¹					Погрешность (средняя), проц.
	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{33}	
ПЖ	28,60	61,50	84,65	94,40	123,95	0,93
КЭ	28,61	61,76	87,10	95,31	124,5	

В заключение приведем первые формы собственных колебаний, вычисленные по МПЖ и МКЭ:

$$[W^{(11)}] = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,92 \end{Bmatrix} \cdot [0,5 \quad 0,865 \quad 1,0 \quad 0,865 \quad 0,5] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,865 & 1,0 & 0,865 & 0,5 \\ 0,46 & 0,796 & 0,92 & 0,796 & 0,46 \end{bmatrix};$$

$$[W^{(11)}] = \begin{bmatrix} 0,513 & 0,87 & 1,0 & 0,87 & 0,513 \\ 0,46 & 0,794 & 0,916 & 0,794 & 0,46 \end{bmatrix}.$$

Перекрытия с жестким закреплением на опорах. Решим ту же задачу, но для перекрытия с жестким закреплением на опорах (рис. 3.6, б).

Узловые обобщенные жесткости парциальных систем 1-го уровня:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\mu_1^4}{l^4} EI_1;$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{\mu_2^4}{l^4} EI_2, \quad (3.22)$$

где $\mu_1 = 4,73004$; $\mu_2 = 7,85321$;
 $EI_1 = EI$; $EI_2 = 10EI$.

Переходя к парциальной системе 2-го уровня упругие опоры с жесткостями (3.22) заменяем стерженьками. Площади поперечных сечений стерженьков определяем по формулам (3.21). В уз-

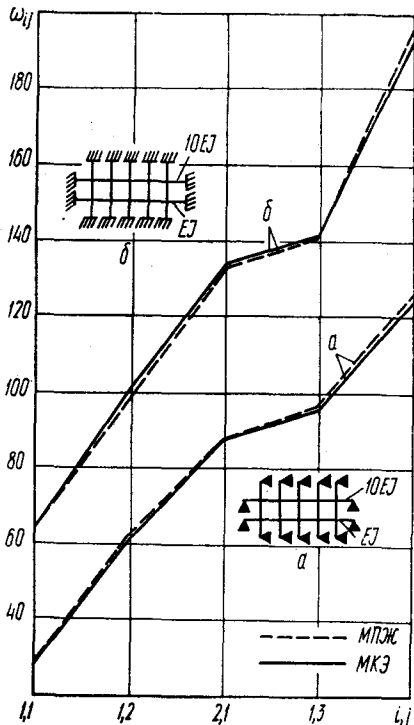


Рис. 3.6. Сравнение методов расчета для нерегулярных в одном направлении перекрытий (а и б на графиках соответствуют схемам а и б).

ловых точках загружаем систему сосредоточенными массами $M = 9,8066$ т. Определение частот выполняем по МКЭ. Далее расчет выполняется аналогично вышеприведенному.

Результаты расчетов даны в табл. 3.8 и на рис. 3.6, б.

Таблица 3.8

Метод	Частота, c^{-1}					Погрешность (средняя), проц.
	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	
ПЖ	63,63	97,57	132,5	136,5	198,0	2,4
КЭ	64,68	100,9	134,1	141,6	193,8	

Первые формы собственных колебаний, определенные по МПЖ и МКЭ:

$$\begin{aligned}
 [W^{(11)}] &= \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,731 \end{Bmatrix} \cdot [0,29 \quad 0,78 \quad 1,0 \quad 0,78 \quad 0,29] = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,293 & 0,782 & 1,0 & 0,782 & 0,293 \\ 0,121 & 0,573 & 0,731 & 0,573 & 0,121 \end{bmatrix}; \\
 [W^{(11)}] &= \begin{bmatrix} 0,302 & 0,785 & 1,0 & 0,785 & 0,302 \\ 0,222 & 0,591 & 0,758 & 0,591 & 0,222 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Системы, нерегулярные в двух направлениях

Определим частоты собственных колебаний шарнирно-опертого по контуру перекрытия с двумя усиленными балками в двух направлениях. Это перекрытие отличается от рассмотренного тем, что момент инерции средней поперечной балки увеличен в 4 раза.

Выделим из перекрытия парциальные системы 1-го уровня (невесомые продольные балки с сосредоточенными массами). Их узловые обобщенные жесткости даны выше. Присоединим эти жесткости в виде упругих опор к поперечным балкам, получим парциальные системы 2-го уровня. Загрузим их в узлах пересечений балок сосредоточенными массами ($M = 9,8066$) и определим частоты собственных колебаний (по МКЭ). Для поперечной балки с моментом инерции I частоты приведены ранее:

$$\omega_1^{(1)} = 43,62 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1^{(2)} = 93,88 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1^{(21)} = 129,2 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1^{(22)} = 189,2 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогичные расчеты выполнены для поперечной балки с моментом инерции $4I$:

$$\omega_2^{(11)} = 71,41 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(12)} = 126,6 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(21)} = 249,9 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^{(22)} = 278,4 \text{ с}^{-1}.$$

Узловые обобщенные жесткости:

$$\lambda_1^{(t,l)} = M\omega_1^{(t,l)2}; \quad \lambda_2^{(t,l)} = M\omega_2^{(t,l)2}.$$

$$\lambda_1^{(11)} = 9,8066 \cdot 43,62^2 = 1,8659 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_1^{(12)} = 8,64321 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_1^{(21)} = 1,63698 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_1^{(22)} = 3,51043 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(11)} = 5,00075 \cdot 10^4 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(12)} = 1,5717 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$\lambda_2^{(21)} = 6,12422 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2}; \quad \lambda_2^{(22)} = 7,6007 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{с}^{-2};$$

Узловые приведенные массы

$$M^{(i,j)} = \frac{\lambda_1^{(i,j)}}{\tilde{\omega}_1^{(i,j)^2}},$$

где $\tilde{\omega}_1^{(i,j)}$ — частоты собственных колебаний первой парциальной системы 2-го уровня с распределенными и сосредоточенными массами (см. с. 54).

$$M^{(11)} = \frac{\lambda_1^{(11)}}{\tilde{\omega}_1^{(11)^2}} = \frac{1,8659 \cdot 10^4}{28,6^2} = 22,8116 \text{ т}; \quad M^{(12)} = 22,852 \text{ т};$$

$$M^{(21)} = 22,8449 \text{ т}; \quad M^{(22)} = 22,849 \text{ т}.$$

Перераспределим узловые приведенные массы между двумя парциальными системами 2-го уровня так, чтобы последние стали равночастотными. Для этого необходимо выполнить следующие условия:

$$\frac{\lambda_1^{(i,j)}}{M_1^{(i,j)}} = \frac{\lambda_2^{(i,j)}}{M_2^{(i,j)}}; \quad 4M_1^{(i,j)} + M_2^{(i,j)} = 5M^{(i,j)}. \quad (3.23)$$

Решив эти уравнения, получим

$$M_1^{(i,j)} = \frac{5M^{(i,j)}}{4 + \frac{\lambda_2^{(i,j)}}{\lambda_1^{(i,j)}}}; \quad M_2^{(i,j)} = M_1 \frac{\lambda_2^{(i,j)}}{\lambda_1^{(i,j)}}. \quad (3.24)$$

$$M_1^{(11)} = \frac{5,22 \cdot 8116}{4 + \frac{5,00075 \cdot 10^4}{1,8659 \cdot 10^4}} = 17,07437 \text{ т}; \quad M_2^{(12)} = 19,6376 \text{ т};$$

$$M_1^{(21)} = 14,75545 \text{ т}; \quad M_1^{(22)} = 18,5307 \text{ т}.$$

Частоты собственных колебаний перекрытия определим по формуле

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{\lambda_1^{(i,j)}}{M_1^{(i,j)}}} \quad (3.25)$$

или

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{\lambda_2^{(i,j)}}{M_2^{(i,j)}}}; \quad (3.26)$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{1,8659 \cdot 10^4}{17,07437}} = 33,07 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{12} = 66,34 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{21} = 105,3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{22} = 137,65 \text{ с}^{-1}.$$

Данные расчетов по МПЖ и МКЭ приведены в табл. 3.9. Общая направленность кривых, соответствующих расчетам МПЖ и МКЭ, совпадает, что свидетельствует о правильном выборе алгоритма расчета и для нерегулярных в обоих направлениях перекрытий. Однако в сравнении со всеми предыдущими расчетами здесь погрешности расчета значительно возросли (от 1 до 3÷12 %). Погрешно-

Таблица 3.9

Метод	Частота, с ⁻¹			
	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}
ПЖ	33,07	66,34	105,3	137,65
КЭ	35,37	61,76	93,62	124,5
Погрешность, проц.	3,02	7,41	12,4	10,56

сти расчета могут быть снижены за счет уточнения парциальных систем 1-го уровня (продольные балки в середине должны иметь упругие опоры).