Глава 2. РАСПАДАЕМОСТЬ РАЗРЕШАЮЩИХ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СИСТЕМ

Дискретная модель пространственной перекрестной системы

Пространственной перекрестной системой будем называть систему, образованную путем соединения в узлах подсистем A, B, C (рис. 2.1, 2.2). Подсистемы представляют собой ансамбли несвязанных параллельных плоских стержневых или пластинчатых систем произвольной структуры (сложная форма, вырезы, соединения пластинок и стержней и т. д.). Расстояния между плоскостями могут быть неодинаковыми. Соединение плоскостей в узлах осуществляется в общем случае шестью связями. Компоненты перемещений узловых соединений (см. рис. 2.1), с помощью которых осу-

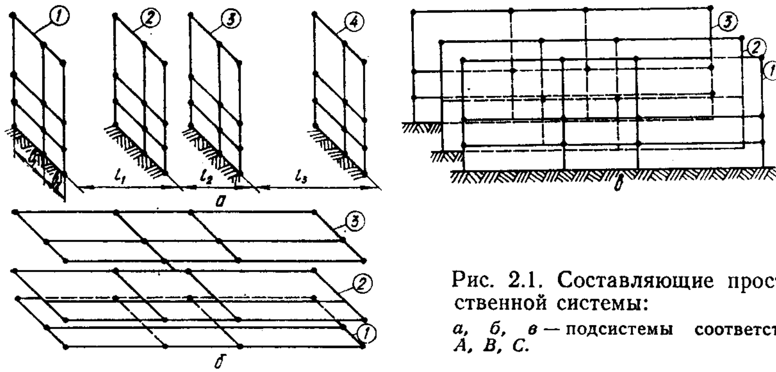

Рис. 2.1. Составляющие пространственной системы:
а, б, в — подсистемы соответственно *А, В, С.*

ществляется образование (синтез) пространственной системы из подсистем *А*, *В* и *С*, принимаются в качестве основных (базовых) неизвестных, через которые могут быть определены все компонен-

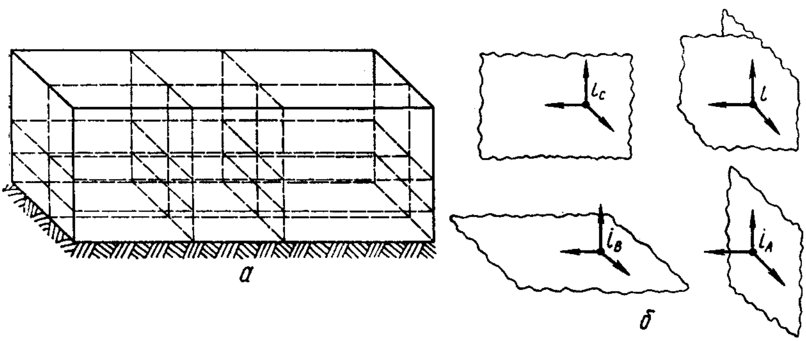

Рис. 2.2. Соединение пространственных систем *(а)* и подсистем *А, В, С* в i-ом узле *(б)*.

ты перемещений в других узлах соединений или между ними. Усилия взаимодействия между подсистемами *А*, *В*, *С* также определяются с помощью базовых неизвестных. В этом смысле каждую из составленных подсистем *А*, *В*, *С* можно рассматривать как суперэлемент, рассчитываемый по методу конечных элементов (МКЭ).

Формирование матрицы жесткости пространственной системы

Обозначим матрицы жесткости подсистем пространственной системы как $[A]$, $[B]$, $[C]$. Объединим подсистемы с помощью матрицы $[H]$ и назовем ее матрицей соединений:

$$[K]=[H]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}[A] & & 0\\ & [B] & \\ 0 & & [C]\end{bmatrix}[H]. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим такой тип соединений, когда перемещения узлов $\{r\}$ всей конструкции и перемещения узлов $\{r_A\}$, $\{r_B\}$, $\{r_C\}$ подсистем одинаковы (рис. 2.2, *б*):

$$\{r_A\} = I\{r\}, \quad \{r_B\} = I\{r\}, \quad \{r_C\} = I\{r\}, \tag{2.2}$$

где $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица, имеющая такой же порядок, как и матрицы $[A]$, $[B]$, $[C]$.

Тогда матрица соединений $[H]$ приобретет следующий вид:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1) и выполнив перемножение матриц получим

$$[K] = [A] + [B] + [C]. \tag{2.4}$$

Аналогичный способ сложения жесткостей для плоских конструкций указал Аргирос [21].

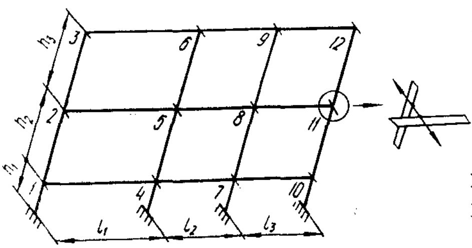

Рис. 2.3. Плоская балочная перекрестная система.

Формула (2.4) может быть использована для формирования матриц жесткости пространственных систем широкого класса. Ограничения на характер структуры матриц жесткости $[A]$, $[B]$, $[C]$ не накладываются. Число связей (степеней свободы) в узле равно шести. Накоторые коэффициенты на главных диагоналях матриц жесткости $[A]$, $[B]$, $[C]$ могут быть равну нулю.

В качестве примера рассмотрим плоскую перекрестную систему (рис. 2.3), состоящую из двух ортогональных балочных подсистем *А* и *В*, соединенных в узлах линейными связями.

Подсистема *А* состоит из четырех консольных вертикальных балок. Ее матрица жесткости имеет квазидиагональный вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} [\bar{A}_1] & & & 0 \\ & [\bar{A}_2] & & \\ & & [\bar{A}_3] & \\ 0 & & & [\bar{A}_4] \end{bmatrix}; \ [\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \ [\bar{A}] = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix};$$

$$[\bar{A}_3] = \begin{bmatrix} a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}; \quad [\bar{A}_4] = \begin{bmatrix} a_{10,10} & a_{10,11} & a_{10,12} \\ a_{11,10} & a_{11,11} & a_{11,12} \\ a_{12,10} & a_{12,11} & a_{12,12} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Подсистема B состоит из трех горизонтальных балок. Ее матрица жесткости имеет структуру «решета»:

$$[B]=\begin{bmatrix} \ulcorner B_{11}\lrcorner & \ulcorner B_{12}\lrcorner & \ulcorner B_{13}\lrcorner & \ulcorner B_{14}\lrcorner \\ \ulcorner B_{21}\lrcorner & \ulcorner B_{22}\lrcorner & \ulcorner B_{23}\lrcorner & \ulcorner B_{24}\lrcorner \\ \ulcorner B_{31}\lrcorner & \ulcorner B_{32}\lrcorner & \ulcorner B_{33}\lrcorner & \ulcorner B_{34}\lrcorner \\ \ulcorner B_{41}\lrcorner & \ulcorner B_{42}\lrcorner & B_{43}\lrcorner & B_{44}\lrcorner \end{bmatrix};\ \ulcorner B_{11}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & b_{33} \end{bmatrix};$$

$$\ulcorner B_{22}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{44} & & 0 \\ & b_{55} & \\ 0 & & b_{66} \end{bmatrix}; \tag{2.6}$$

$$\ulcorner B_{33}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{77} & & 0 \\ & b_{88} & \\ 0 & & b_{99} \end{bmatrix};\ \ulcorner B_{44}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{10,10} & & 0 \\ & b_{11,11} & \\ 0 & & b_{12,12} \end{bmatrix};\ \ulcorner B_{12}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{14} & & 0 \\ & b_{25} & \\ 0 & & b_{36} \end{bmatrix};$$

$$\ulcorner B_{13}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{17} & & 0 \\ & b_{28} & \\ 0 & & b_{39} \end{bmatrix};\quad \ulcorner B_{14}\lrcorner=\begin{bmatrix} b_{1,10} & & 0 \\ & b_{2,11} & \\ 0 & & b_{3,12} \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости перекрестной системы формируем по правилу (2.4)

$$[K]=[A]+[B]=\begin{bmatrix} [\bar{A}_1]+\ulcorner B_{11}\lrcorner & \ulcorner B_{12}\lrcorner & \ulcorner B_{13}\lrcorner & \ulcorner B_{14}\lrcorner \\ \ulcorner B_{21}\lrcorner & [\bar{A}_2]+\ulcorner B_{22}\lrcorner & \ulcorner B_{23}\lrcorner & \ulcorner B_{24}\lrcorner \\ \ulcorner B_{31}\lrcorner & \ulcorner B_{32}\lrcorner & [\bar{A}_3]+\ulcorner B_{33}\lrcorner & \ulcorner B_{34}\lrcorner \\ \ulcorner B_{41}\lrcorner & \ulcorner B_{42}\lrcorner & \ulcorner B_{43}\lrcorner & [\bar{A}_4]+\ulcorner B_{44}\lrcorner \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Если нумерацию узлов связать не с вертикальными, а с горизонтальными элементами, то матрица жесткости перекрестной системы будет иметь вид:

$$[K]=[A]+[B]=\begin{bmatrix} [\bar{B}_1]+\ulcorner A_{11}\lrcorner & \ulcorner A_{12}\lrcorner & \ulcorner A_{13}\lrcorner \\ \ulcorner A_{21}\lrcorner & [\bar{B}_2]+\ulcorner A_{22}\lrcorner & \ulcorner A_{23}\lrcorner \\ \ulcorner A_{31}\lrcorner & \ulcorner A_{32}\lrcorner & [\bar{B}_3]+\ulcorner A_{33}\lrcorner \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Здесь форму «решета» и квазидиагональную принимают соответственно матрицы жесткости подсистем $[A]$ и $[B]$.

Полная распадаемость разрешающих уравнений для задачи на собственные колебания

Плоская квазирегулярная балочная перекрестная система. Балочную перекрестную систему будем называть квазирегулярной, если все балки каждого направления одинаковы и с одинаковым закреплением концов. Расстояния между балками обоих направлений могут быть различными (см. рис. 2.3).

Рассмотрим важный для практических приложений случай, когда перекрестная система загружена одинаковыми узловыми сосредоточенными массами M.

Матрицы жесткости подсистем A и B имеют вид (см. выражения (2.5) и (2.6)):

$$[A]=\begin{bmatrix}[\bar{A}] & & & 0\\ & [\bar{A}] & & \\ & & [\bar{A}] & \\ 0 & & & [\bar{A}]\end{bmatrix},\quad [\bar{A}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{33}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix};\qquad (2.9)$$

$$[B]=\begin{bmatrix}b_{11}\mathrm{I} & b_{14}\mathrm{I} & b_{17}\mathrm{I} & b_{1,10}\mathrm{I}\\ b_{41}\mathrm{I} & b_{44}\mathrm{I} & b_{47}\mathrm{I} & b_{4,10}\mathrm{I}\\ b_{71}\mathrm{I} & b_{74}\mathrm{I} & b_{77}\mathrm{I} & b_{7,10}\mathrm{I}\\ b_{10,1}\mathrm{I} & b_{10,4}\mathrm{I} & b_{10,7}\mathrm{I} & b_{10,10}\mathrm{I}\end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица, имеющая третий порядок.

Матрица жесткости перекрестной системы

$$[K]=[A]+[B].\qquad (2.10)$$

Система статических разрешающих уравнений метода перемещений в матричной форме

$$([A]+[B])\{r\}=\{F\},\qquad (2.11)$$

где $\{r\}$, $\{F\}$ — векторы узловых перемещений и внешних сил.

Переходя по принципу Даламбера от статики к динамике (для собственных колебаний), имеем

$$([A]+[B]-[\lambda])\{r\}=0,\qquad (2.12)$$

где $\ulcorner\Lambda\lrcorner=\ulcorner M\lrcorner\,\omega^2$; $\ulcorner M\lrcorner$ — диагональная матрица масс; ω — частоты собственных колебаний; $\{r\}$ — вектор узловых амплитудных перемещений.

Ф. Р. Гантмахер [18] * доказал теорему, что если матрицы $[A]$ и $[B]$ перестановочны (коммутативны), то [6]

$$\ulcorner\Lambda\lrcorner=\ulcorner\lambda_A\lrcorner+\ulcorner\lambda_B\lrcorner,\qquad (2.13)$$

где λ_A, λ_B — собственные числа соответственно матриц $[A]$ и $[B]$.

Выясним, перестановочны ли матрицы $[A]$ и $[B]$.

Умножим матрицу A на матрицу B справа и слева:

$$[A][B]=\begin{bmatrix}[\bar{A}]b_{11}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{14}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{17}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{1,10}\mathrm{I}_3\\ [\bar{A}]b_{41}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{44}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{47}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{4,10}\mathrm{I}_3\\ [\bar{A}]b_{71}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{74}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{77}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{7,10}\mathrm{I}_3\\ [\bar{A}]b_{10,1}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{10,4}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{10,7}\mathrm{I}_3 & [\bar{A}]b_{10,10}\mathrm{I}_3\end{bmatrix};\qquad (2.14)$$

$$[B][A]=\begin{bmatrix}b_{11}\mathrm{I}_3\bar{A} & b_{14}\mathrm{I}_3\bar{A} & b_{17}\mathrm{I}_3\bar{A} & b_{1,10}\mathrm{I}_3[\bar{A}]\\ b_{41}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{44}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{47}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{4,10}\mathrm{I}_3[\bar{A}]\\ b_{71}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{74}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{77}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{7,10}\mathrm{I}_3[\bar{A}]\\ b_{10,1}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{10,4}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{10,7}\mathrm{I}_3[\bar{A}] & b_{10,10}\mathrm{I}_3[\bar{A}]\end{bmatrix}.\qquad (2.15)$$

---

* Книга Ф. Р. Гантмахера вышла в свет в конце 1953 г. Следует подчеркнуть, кто теорема о суммировании собственных чисел для общего случая была доказана ранее — в мае 1953 г. В. К. Егуповым в работе [19].

Сравнивая (2.14) и (2.15), видим, что $[A][B]=[B][A]$, поскольку матрица $[\bar{A}]$ и скалярные матрицы $b_{11}I_3$, $b_{14}I_3$ и т. д. перестановочны.

Из равенства (2.13)

$$\ulcorner M \lrcorner \omega^2 = \ulcorner \lambda_A \lrcorner + \ulcorner \lambda_B \lrcorner \tag{2.16}$$

или $$\omega^2 = \frac{\lambda_A}{M} + \frac{\lambda_B}{M} = \omega_A^2 + \omega_B^2, \tag{2.17}$$

где ω_A^2, ω_B^2 — квадраты частот соответственно одного вертикального и одного горизонтального элементов, загруженных в узлах одинаковыми сосредоточенными массами (рис. 2.4, *а*).

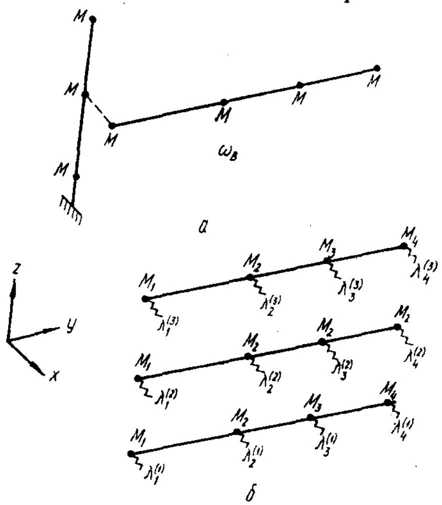

Рис. 2.4. Элементы, выделенные из перекрестной системы, для определения парциальных частот ω_A и ω_B (*а*) и парциальные системы 2-го уровня для плоской балочной перекрестной системы $A+B$ (*б*).

Поскольку подсистема B состоит из незакрепленных в пространстве элементов, то первых два собственных значения λ равны нулю. Тогда

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_{A_1}^2. \tag{2.18}$$

В дальнейшем вертикальные и горизонтальные элементы, выделенные из перекрестной системы (см.рис. 2.4, *б*), будем называть парциальными, а метод определения частот собственных колебаний по формулам (2.13), (2.17) — методом парциальных жесткостей (МПЖ). Собственные значения λ_A, λ_B матриц A и B будем трактовать как обобщенные жесткости парциальных систем.

Квазирегулярная пространственная перекрестная система, состоящая из двух подсистем. Пусть одна из подсистем представлена одинаковыми параллельными вертикальными плоскими элементами (рамы, диафрагмы и т. д.), имеющими регулярную структуру по высоте. Расстояния между ними могут быть различными. Матрицу жесткости такой подсистемы можно представить в следующем виде

$$\underset{(d\times d)}{[A]} = \begin{bmatrix} [A] & & 0 \\ & [A] & \\ & & \ddots \\ 0 & & [A] \end{bmatrix}; \quad [\bar{A}] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \dots [a_{1m}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \dots [a_{2m}] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [a_{m1}] & [a_{m2}] & \dots [a_{mm}] \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

где d — число плоских элементов; $[a_{ij}]$ — матрица, имеющая порядок в $6\ n$; n — число этажей; m — число вертикальных «полос» в одной плоскости.

Матрица жесткости второй подсистемы, состоящей из n одинаковых параллельных двумерных горизонтальных плоских элементов, имеет такую структуру:

$$[B]=\begin{bmatrix}[B_{11}] & [B_{12}] & \dots & [B_{1d}]\\ [B_{21}] & [B_{22}] & \dots & [B_{2d}]\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ [B_{d1}] & [B_{d2}] & \dots & [B_{dd}]\end{bmatrix};\quad [B_{ij}]=\begin{bmatrix}\ulcorner b_{11}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & \ulcorner b_{12}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & \dots & \ulcorner b_{1m}^{ij}\mathrm{I}\\ \ulcorner b_{21}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & \ulcorner b_{22}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & \dots & \ulcorner b_{2m}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \ulcorner b_{m1}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & \ulcorner b_{m_2}^{ij}\lrcorner\mathrm{I} & & \ulcorner b_{mm}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}\end{bmatrix}; \tag{2.20}$$

где I — единичная матрица, имеющая порядок $6n$.

Соединим обе подсистемы в узлах пересечения шестью связями. Тогда согласно выражению (2.4), матрица жесткости пространственной системы будет $[K]=[A]+[B]$.

Для собственных колебаний матричное разрешающее уравнение имеет вид $([A]+[B]-[\lambda])\{r\}=0$ $([\lambda]=\ulcorner M\lrcorner\omega^2$, $\ulcorner M\lrcorner$ — диагональная матрица масс; ω — частота собственных колебаний).

Если матрицы $[A]$ и $[B]$ перестановочны (коммутативны), то

$$[\Lambda]=\ulcorner\lambda_A\lrcorner+\ulcorner\lambda_B\lrcorner, \tag{2.21}$$

где λ_A, λ_B — собственные числа соответственно матриц $[A]$ и $[B]$.

Выясним, в каких случаях матрицы $[A]$ и $[B]$ перестановочны:

$$[A][B]=\begin{bmatrix}[\bar{A}][B_{11}] & [\bar{A}][B_{12}] & \dots & [\bar{A}][B_{1d}]\\ [\bar{A}][B_{21}] & [\bar{A}][B_{22}] & \dots & [\bar{A}][B_{2d}]\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ [\bar{A}][B_{d1}] & [\bar{A}][B_{d2}] & \dots & [\bar{A}][B_{dd}]\end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

где

$$[\bar{A}][B_{ij}]=\begin{bmatrix}\sum\limits_p[a_{1p}]\ulcorner b_{p1}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n & \sum[a_{1p}]\ulcorner b_{p2}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p[a_{1p}]\ulcorner b_{pm}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n\\ \sum\limits_p[a_{2p}]\ulcorner b_{p1}^{ij}\mathrm{I}_n\lrcorner & \sum\limits_p[a_{2p}]\ulcorner b_{p2}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p[a_{2p}]\ulcorner b_{pm}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \sum\limits_p[a_{mp}]\ulcorner b_{p1}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n & \sum\limits_p[a_{mp}]\ulcorner b_{p2}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p[a_{mp}]\ulcorner b_{pm}^{ij}\lrcorner\mathrm{I}_n\end{bmatrix}.$$

Умножим матрицу $[A]$ на матрицу $[B]$ справа

$$[B]\ [A]=\begin{bmatrix}[B_{11}]\ [\bar{A}] & [B_{12}]\ [\bar{A}] & \dots & [B_{1d}]\ [\bar{A}]\\ [B_{21}]\ [\bar{A}] & [B_{22}]\ [\bar{A}] & \dots & [B_{2d}]\ [\bar{A}]\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ [B_{d1}]\ [\bar{A}] & [B_{d2}]\ [\bar{A}] & \dots & [B_{dd}]\ [\bar{A}]\end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

где

$$]B_{ij}][A]=\begin{bmatrix}\sum\limits_p\ulcorner b_{1p}^{ij}\lrcorner[a_{p1}]\mathrm{I}_n & \sum\limits_p\ulcorner b_{1p}^{ij}\lrcorner[a_{p2}]\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p\ulcorner b_{1p}^{ij}\lrcorner[a_{pm}]\mathrm{I}_n\\ \sum\limits_p\ulcorner b_{2p}^{ij}\lrcorner[a_{p1}]\mathrm{I}_n & \sum\limits_p\ulcorner b_{2p}^{ij}\lrcorner[a_{p2}]\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p\ulcorner b_{2p}^{ij}\lrcorner[a_{pm}]\mathrm{I}_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \sum\limits_p\ulcorner b_{mp}^{ij}\lrcorner[a_{p1}]\mathrm{I}_n & \sum\limits_p\ulcorner b_{mp}^{ij}\lrcorner[a_{p2}]\mathrm{I}_n & \dots & \sum\limits_p\ulcorner b_{mp}^{ij}\lrcorner[a_{pm}]\mathrm{I}_n\end{bmatrix}$$

Равенство $[A][B]=[B][A]$ имеет место, если

$$\sum_p [a_{kp}] \ulcorner b_{pk}^{ij} \lrcorner \mathrm{I}_n = \sum_p \ulcorner b_{kp}^{ij} \lrcorner [a_{pk}] \mathrm{I}_n; \tag{2.24}$$

$$\sum_p [a_{kp}] \ulcorner b_{ps}^{ij} \lrcorner \mathrm{I}_n = \sum_p \ulcorner b_{sp}^{ij} \lrcorner [a_{pk}] \mathrm{I}_n. \tag{2.25}$$

Для выполнения условий (2.24), (2.25) необходимо, чтобы

$$[a_{ks}]=0, \ [a_{11}]=[a_{22}]=\ldots=[a_{mm}]=\ulcorner a \lrcorner. \tag{2.26}$$

Это означает, что наложенные в углах связи должны быть ортогональными, а плоские элементы подсистемы A (или B) разделены на независимые и равные полосы.

Если сосредоточенные массы M одинаковы, то из равенства (2.21) следует

$$\omega^2 = \frac{\lambda_A}{M} + \frac{\lambda_B}{M} = \omega_A^2 + \omega_B^2 = \omega_{\bar{A}}^2 + \omega_{\bar{B}}^2, \tag{2.27}$$

где $\omega_{\bar{A}}^2$, $\omega_{\bar{B}}^2$ — квадраты частот соответственно одного вертикального и одного горизонтального элементов, загруженных в узлах одинаковыми сосредоточенными массами M.

Квазирегулярная пространственная перекрестная система, состоящая из трех подсистем. К рассмотренной перекрестной системе добавим еще одну подсистему C.

Как было показано, матрицы $[A]$ и $[B]$ перестановочны, если подсистема A представлена в виде одинаковых вертикальных полос. Аналогичные ограничения должны быть наложены и на подсистему C. Тогда будут попарно перестановочны все три матрицы $[A]$, $[B]$, $[C]$ и, следовательно:

$$\omega^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2 + \omega_C^2 = \omega_{\bar{A}}^2 + \omega_{\bar{B}}^2 + \omega_{\bar{C}}^2, \tag{2.28}$$

где $\omega_{\bar{A}}^2$, $\omega_{\bar{B}}^2$, $\omega_{\bar{C}}^2$ — квадраты частот соответственно поперечного вертикального, горизонтального и продольного вертикального элементов, загруженных в узлах одинаковыми сосредоточенными массами M.

Распадаемость на группы

Плоская нерегулярная в одном направлении балочная перекрестная система. В качестве примера рассмотрим плоскую балочную перекрестную систему (см. рис. 2.3), состоящую из четырех неодинаковых вертикальных (с различными закреплениями) и трех одинаковых горизонтальных **балок.**

Уравнения собственных колебаний в матричной форме имеют вид:

$$([A]+[B]-[\Lambda])\{r\}=0, \tag{2.29}$$

где

$$[A]=\begin{bmatrix} [\bar{A}] & & & 0 \\ & [\bar{A}] & & \\ & & [\bar{A}] & \\ 0 & & & [\bar{A}] \end{bmatrix}, \quad [B]=\begin{bmatrix} b_{11}\mathrm{I} & b_{14}\mathrm{I} & b_{17}\mathrm{I} & b_{1,10}\mathrm{I} \\ b_{41}\mathrm{I} & b_{44}\mathrm{I} & b_{47}\mathrm{I} & b_{4,10}\mathrm{I} \\ b_{71}\mathrm{I} & b_{74}\mathrm{I} & b_{77}\mathrm{I} & b_{7,10}\mathrm{I} \\ b_{10,1}\mathrm{I} & b_{10,4}\mathrm{I} & b_{10,7}\mathrm{I} & b_{10,10}\mathrm{I} \end{bmatrix},$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \ulcorner M_1 \lrcorner & & & \\ & \ulcorner M_2 \lrcorner & & \\ & & \ulcorner M_3 \lrcorner & \\ 0 & & & \ulcorner M_4 \lrcorner \end{bmatrix} \omega^2, \quad \ulcorner M_p \lrcorner = \begin{bmatrix} M_p & & 0 \\ & M_p & \\ 0 & & M_p \end{bmatrix},$$

M_p — сосредоточенная узловая масса; I — единичная матрица, имеющая третий порядок.

В уравнении (2.29) перейдем к новым неизвестным

$$\{r\} = \begin{bmatrix} [V_1] & & & 0 \\ & [V_2] & & \\ & & [V_3] & \\ 0 & & & [V_4] \end{bmatrix} \cdot \{q\} = \ulcorner V \lrcorner \{q\}, \qquad (2.30)$$

где $[V_p]$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям собственных колебаний для отдельных балок подсистемы A:

$$[\bar{A}_1][V_1] = \ulcorner \lambda_1 \lrcorner [V_1], \ [\bar{A}_2][V_2] = \ulcorner \lambda_2 \lrcorner [V_2], \ [\bar{A}_3][V] = \ulcorner \lambda_3 \lrcorner [V_3],$$

$$[\bar{A}_4][V_4] = \ulcorner \lambda_4 \lrcorner [V_4]. \qquad (2.31)$$

Подставим (2.30) в уравнение (2.29) и умножим последнее слева на $\ulcorner V \lrcorner^{\text{т}}$

$$\ulcorner V \lrcorner^{\text{т}} ([A] + [B] - [\Lambda]) \ulcorner V \lrcorner \{q\} = 0. \qquad (2.32)$$

Выполним последовательно перемножения матриц в уравнении (2.32):

$$\ulcorner V \lrcorner^{\text{т}} [A] \ulcorner V \lrcorner =$$

$$= \begin{bmatrix} [V_1]^{\text{т}}[\bar{A}_1][V_1] & & & 0 \\ & [V_2]^{\text{т}}[\bar{A}_2][V_2] & & \\ & & [V_3]^{\text{т}}[\bar{A}_3][V_3] & \\ 0 & & & [V_4]^{\text{т}}[\bar{A}_4][V_4] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \ulcorner \lambda_1 \lrcorner & & & 0 \\ & \ulcorner \lambda_2 \lrcorner & & \\ & & \ulcorner \lambda_3 \lrcorner & \\ 0 & & & \ulcorner \lambda_4 \lrcorner \end{bmatrix}; \qquad (2.33)$$

$$\ulcorner V^{\text{т}} \lrcorner [B] \ulcorner V \lrcorner =$$

$$= \begin{bmatrix} [V_1]^{\text{т}} b_{11}\mathrm{I}[V_1] & [V_1]^{\text{т}} b_{14}\mathrm{I}[V_1] & [V_1]^{\text{т}} b_{17}\mathrm{I}[V_1] & [V_1]^{\text{т}} b_{1,10}\mathrm{I}[V_1] \\ [V_2]^{\text{т}} b_{41}\mathrm{I}[V_2] & [V_2]^{\text{т}} b_{44}\mathrm{I}[V_2] & [V_2]^{\text{т}} b_{47}\mathrm{I}[V_2] & [V_2]^{\text{т}} b_{4,10}\mathrm{I}[V_2] \\ [V_3]^{\text{т}} b_{71}\mathrm{I}[V_3] & [V_3]^{\text{т}} b_{74}\mathrm{I}[V_3] & [V_3]^{\text{т}} b_{77}\mathrm{I}[V_3] & [V_3]^{\text{т}} b_{7,10}\mathrm{I}[V_3] \\ [V_4]^{\text{т}} b_{10,1}\mathrm{I}[V_4] & [V_4]^{\text{т}} b_{10,4}\mathrm{I}[V_4] & [V_4]^{\text{т}} b_{10,7}\mathrm{I}[V_4] & [V_4]^{\text{т}} b_{10,10}\mathrm{I}[V_4] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\mathrm{I} & b_{14}\mathrm{I} & b_{17}\mathrm{I} & b_{1,10}\mathrm{I} \\ b_{41}\mathrm{I} & b_{44}\mathrm{I} & b_{47}\mathrm{I} & b_{4,10}\mathrm{I} \\ b_{71}\mathrm{I} & b_{74}\mathrm{I} & b_{77}\mathrm{I} & b_{7,10}\mathrm{I} \\ b_{10,1}\mathrm{I} & b_{10,4}\mathrm{I} & b_{10,7}\mathrm{I} & b_{10,10}\mathrm{I} \end{bmatrix}^{*}; \qquad (2.34)$$

* Ортогональные преобразования скалярную матрицу не меняют.

$$\ulcorner V \lrcorner^{T} [\Lambda] \ulcorner V \lrcorner =$$

$$= \begin{bmatrix} [V_1]^T \ulcorner M_1 \lrcorner [V_1] & & & \\ & [V_2]^T \ulcorner M_2 \lrcorner [V_2] & & \\ & & [V_3]^T \ulcorner M_3 \lrcorner [V_3] & \\ & & & [V_4]^T \ulcorner M_4 \lrcorner [V_4] \end{bmatrix} \omega^2 =$$

$$= [\Lambda]. \tag{2.35}$$

Подставляя (2.33)—(2.35) в уравнение (2.32), получим

$$\left(\begin{bmatrix} \ulcorner \lambda_1 \lrcorner & & & 0 \\ & \ulcorner \lambda_2 \lrcorner & & \\ & & \ulcorner \lambda_3 \lrcorner & \\ 0 & & & \ulcorner \lambda_4 \lrcorner \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ulcorner M_1 \lrcorner & & & 0 \\ & \ulcorner M_2 \lrcorner & & \\ & & \ulcorner M_3 \lrcorner & \\ 0 & & & \ulcorner M_4 \lrcorner \end{bmatrix} \omega^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} b_{11}\mathrm{I} & b_{14}\mathrm{I} & b_{17}\mathrm{I} & b_{1,10}\mathrm{I} \\ b_{41}\mathrm{I} & b_{44}\mathrm{I} & b_{47}\mathrm{I} & b_{4,10}\mathrm{I} \\ b_{71}\mathrm{I} & b_{74}\mathrm{I} & b_{77}\mathrm{I} & b_{7,10}\mathrm{I} \\ b_{10,1}\mathrm{I} & b_{10,4}\mathrm{I} & b_{10,7}\mathrm{I} & b_{10,10}\mathrm{I} \end{bmatrix} \right) \cdot \{q\} = 0. \tag{2.36}$$

Поменяем нумерацию неизвестных, связав их с горизонтальными неизвестными. Тогда матрица жесткости подсистемы B, имеющая структуру «решета», преобразуется в квазидиагональную (см. формулу (2.8)), а матрицы обобщенных жесткостей λ и сосредоточенных масс сохраняют диагональную структуру. Уравнение (2.36) приобретает вид

$$\begin{bmatrix} [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(1)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 & & \\ & [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(2)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 & \\ & & [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(3)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \{\bar{q}_1\} \\ \{\bar{q}_2\} \\ \{\bar{q}_3\} \end{Bmatrix} = 0, \tag{2.37}$$

где $[\bar{B}]$ — матрица жесткости горизонтального элемента;

$$\ulcorner \lambda^{(i)} \lrcorner = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(i)} & & & 0 \\ & \lambda_2^{(i)} & & \\ & & \lambda_3^{(i)} & \\ 0 & & & \lambda_4^{(i)} \end{bmatrix}; \quad \ulcorner M \lrcorner = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & M_3 & \\ 0 & & & M_4 \end{bmatrix}.$$

Как видно из выражения (2.37), разрешающая система канонических уравнений метода перемещений распалась на три независимые группы, каждая из которых определяет свою серию частот собственных колебаний.

С механической точки зрения плоская балочная перекрестная система преобразовалась в три горизонтальные балки на упругих опорах с сосредоточенными массами, колеблющиеся независимо одна от другой (рис. 2.4, *б*). Такие балки будем в дальнейшем называть парциальными системами 2-го уровня.

Пространственная нерегулярная перекрестная система. Рассмотрим вначале пространственную нерегулярную перекрестную систему, состоящую из двух подсистем A и B. Наложим на них следующие ограничения:

1. Неодинаковые двумерные вертикальные элементы обладают подобием форм по всем вертикальным «полосам» и, следовательно, могут быть представлены как квазиодномерные системы;

2. Двумерные горизонтальные элементы одинаковы;

3. Связи, накладываемые на узлы пересечения подсистем, ортогональны (три линейные и одна угловая).

Матрицы жесткости подсистем имеют следующую структуру:

$$[A]=\begin{bmatrix}[\bar{A}_1] & & 0\\ & [\bar{A}_2] & \\ & & \ddots \\ 0 & & [\bar{A}_d]\end{bmatrix},\quad [\bar{A}_p]=\begin{bmatrix}[a^p_{11}] & & 0\\ & [a^p_{22}] & \\ & & \ddots \\ 0 & & [a^p_{mm}]\end{bmatrix},\tag{2.38}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}[B_{11}] & [B_{12}] & \ldots & [B_{1d}]\\ [B_{21}] & [B_{22}] & \ldots & [B_{2d}]\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ [B_{d1}] & [B_{d2}] & \ldots & [B_{dd}]\end{bmatrix},\quad [B_{ij}]=\begin{bmatrix}\ulcorner b^{ij}_{11}\lrcorner \mathrm{I} & \ulcorner b^{ij}_{12}\lrcorner \mathrm{I} & \ldots & \ulcorner b^{ij}_{1m}\lrcorner \mathrm{I}\\ \ulcorner b^{ij}_{21}\lrcorner \mathrm{I} & \ulcorner b^{ij}_{22}\lrcorner \mathrm{I} & \ldots & \ulcorner b^{ij}_{2m}\lrcorner \mathrm{I}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \ulcorner b^{ij}_{m1}\lrcorner \mathrm{I} & \ulcorner b^{ij}_{m2}\lrcorner \mathrm{I} & \ldots & \ulcorner b^{ij}_{mm}\lrcorner \mathrm{I}\end{bmatrix},\tag{2.39}$$

где I — единичная матрица, порядок которой равен n.

Уравнения собственных колебаний в матричной форме имеют вид:

$$([A]+[B]-[\Lambda])\cdot\{r\}=0,\tag{2.40}$$

где $[\Lambda]=\begin{bmatrix}M & & 0\\ & M & \\ 0 & & M\end{bmatrix}\omega^2\equiv\ulcorner M\lrcorner\omega^2$; M — узловая сосредоточенная масса.

В уравнении (2.40) перейдем к новым неизвестным

$$\{r\}=\begin{bmatrix}[V]\,\mathrm{I}_m & & 0\\ & [V]\,\mathrm{I}_m & \\ 0 & & [V]\,\mathrm{I}_m\end{bmatrix}\cdot\{q\}\equiv\ulcorner V\mathrm{I}_m\lrcorner\{q\},\tag{2.41}$$

где $[V]$ — матрицы, удовлетворяющие согласно ограничению 1 уравнениям:

$$[a^p_{11}][V]=\ulcorner\lambda^p_1\lrcorner[V],\ \ldots,\ [a^p_{mm}][V]=\ulcorner\lambda^p_m\lrcorner[V].\tag{2.42}$$

Подставим (2.41) в уравнение (2.40) и умножим последнее слева на $\ulcorner V\mathrm{I}^{\mathrm{T}}_m\lrcorner$

$$\ulcorner V\mathrm{I}^{\mathrm{T}}_m\lrcorner(A+B-\Lambda)\ulcorner V\mathrm{I}_m\lrcorner\{q\}=0.\tag{2.43}$$

Выполним последовательно перемножения матриц в уравнении (2.43)

$$\ulcorner V\mathrm{I}_{m}\lrcorner\,[A]\,\ulcorner V\mathrm{I}_{m}\lrcorner =$$

$$= \begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[\bar{A}_1][V]\mathrm{I}_m & & & 0 \\ & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[\bar{A}_2][V]\mathrm{I}_m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[\bar{A}_d][V]\mathrm{I}_m \end{bmatrix}; \quad (2.44)$$

$$[V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[\bar{A}_p][V]\mathrm{I}_m =$$

$$= \begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}}[a^p_{11}][V] & & & 0 \\ & [V]^{\mathrm{T}}[a^p_{22}]\,[V] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [V]^{\mathrm{T}}[a^p_{mm}][V] \end{bmatrix}; \qquad (2.45)$$

$$[V]^{\mathrm{T}}[a^p_{ss}][V] =$$

$$= \begin{bmatrix} [X] & & & 0 \\ & [Y] & & \\ & & [Z] & \\ 0 & & & [\psi] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} [a^p_{ssx}] & & & 0 \\ & [a^p_{ssy}] & & \\ & & [a^p_{ssz}] & \\ 0 & & & [a^x_{ss\varphi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [X] & & & 0 \\ & [Y] & & \\ & & [Z] & \\ 0 & & & [\psi] \end{bmatrix}^{*} =$$

$$= \begin{bmatrix} [X]^{\mathrm{T}}[a^p_{ssx}][X] & & & 0 \\ & [Y]^{\mathrm{T}}[a^p_{ssy}][Y] & & \\ & & [Z]^{\mathrm{T}}[a^p_{ssz}][Z] & \\ 0 & & & [\psi]^{\mathrm{T}}[a^p_{ss\varphi}][\psi] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ulcorner\lambda^p_{sx}\lrcorner & & & 0 \\ & \ulcorner\lambda^p_{sy}\lrcorner & & \\ & & \ulcorner\lambda^p_{sz}\lrcorner & \\ 0 & & & \ulcorner\lambda^p_{s\varphi}\lrcorner \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \ulcorner\lambda_s\lrcorner\,. \qquad (2.46)$$

Заметим, что матрицы $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $[\Psi]$ составлены из собственных векторов, которые от индексов s и p не зависят (ограничение *1*).

Произведение матриц $\ulcorner V\mathrm{I}^{\mathrm{T}}_{m}\lrcorner[B]\ulcorner V\mathrm{I}_{m}\lrcorner$:

$$\begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{11}][V]\mathrm{I}_m & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{12}][V]\mathrm{I}_m \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{1d}][V]\mathrm{I}_m \\ [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{21}][V]\mathrm{I}_m & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{22}][V]\mathrm{I}_m \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{2d}][V]\mathrm{I}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{d1}][V]\mathrm{I}_m & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{d2}][V[\,\mathrm{I}_m \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{dd}][V]\mathrm{I}_m \end{bmatrix}; \quad (2.47)$$

$$[V]^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_m[B_{ij}][V]\mathrm{I}_m =$$

$$\begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{11}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{12}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{1m}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \\ [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{21}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{22}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{2m}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{m1}\urcorner\mathrm{I}_n[V] & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{m2}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \ldots & [V]^{\mathrm{T}}\ulcorner b^{ij}_{mm}\lrcorner\mathrm{I}_n[V] \end{bmatrix}; \quad (2.48)$$

* В силу ограничения *3* структура матриц $[a^p_{ss}]$ квазидиагональная.

$$[V]^{\mathrm{T}} \ulcorner b^{ij}_{ps} \lrcorner \mathrm{I}_n [V] =$$

$$= \begin{bmatrix} [X] & & & 0 \\ & [Y] & & \\ & & [Z] & \\ 0 & & & [\psi] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} b^{ij}_{psx}\mathrm{I}_n & & & 0 \\ & b^{ij}_{xsy}\mathrm{I}_n & & \\ & & b^{ij}_{psz}\mathrm{I}_n & \\ 0 & & & b^{ij}_{ps\varphi}\mathrm{I}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [X] & & & 0 \\ & [Y] & & \\ & & [Z] & \\ 0 & & & [\psi] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [X]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psx}\mathrm{I}_n [X] & & & 0 \\ & [Y]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psy}\mathrm{I}_n [Y] & & \\ & & [Z]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psz}\mathrm{I}_n [Z] & \\ 0 & & & [\psi]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{ps\varphi}\mathrm{I}_n [\psi] \end{bmatrix}; \quad (2.49)$$

$$[X]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psx}\mathrm{I}_n [X] =$$

$$= \begin{bmatrix} [X_1^{(1)}] & [X_1^{(2)}] & \dots & [X_1^{n}] \\ [X_2^{(1)}] & [X_2^{(2)}] & \dots & [X_2^{n}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [X_n^{(1)}] & [X_n^{(2)}] & \dots & [X_n^{n}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^{ij}_{psx} & & 0 \\ & b^{ij}_{psx} & \\ & & \ddots \\ 0 & & b^{ij}_{psx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [X_1^{(1)}] & [X_1^{(2)}] & \dots & [X_1^{n}] \\ [X_2^{(1)}] & [X_2^{(2)}] & \dots & [X_2^{n}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [X_n^{(1)}] & [X_n^{(2)}] & \dots & [X_n^{n}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(1)^2} & b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(1)} X_r^{(2)} & \dots & b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(1)} X_r^{(n)} \\ b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(2)} X_r^{(1)} & b^{il}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(2)2} & \dots & b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(2)} X_r^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(n)} X_r^{(1)} & b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(n)} X_r^{(2)} & \dots & b^{ij}_{psx} \sum\limits_r X_r^{(n)^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b^{ij}_{psx} & & \\ & b^{ij}_{psx} & \\ & & \ddots \\ & & b^{ij}_{psx} \end{bmatrix}^* \equiv b^{ij}_{psx}\mathrm{I}_n. \quad (2.50)$$

Аналогично:

$$[Y]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psy}\mathrm{I}_n [Y] = \begin{bmatrix} b^{ij}_{psy} & & 0 \\ & b^{ij}_{psy} & \\ & & \ddots \\ 0 & & b^{ij}_{psy} \end{bmatrix} \equiv b^{ij}_{psy}\mathrm{I}_n; \quad (2.51)$$

$$[Z]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{psz}\mathrm{I}_n [Z] = \begin{bmatrix} b^{ij}_{psz} & & 0 \\ & b^{ij}_{psz} & \\ & & \ddots \\ 0 & & b^{ij}_{psz} \end{bmatrix} \equiv b^{ij}_{psz}\mathrm{I}_n; \quad (2.52)$$

$$[\psi]^{\mathrm{T}} b^{ij}_{ps\varphi}\mathrm{I}_n [\psi] = \begin{bmatrix} b^{ij}_{ps\varphi} & & 0 \\ & b^{ij}_{ps\varphi} & \\ & & \ddots \\ 0 & & b^{ij}_{ps\varphi} \end{bmatrix} \equiv b^{il}_{ps\varphi}\mathrm{I}_n. \quad (2.53)$$

* Функции $X_j^{(1)}$ ортогональны и ортонормированы.

Таким образом

$$[V]^{\mathrm{T}} \ulcorner b_{ps\lrcorner}^{ij} \mathrm{I}_n [V] = \begin{bmatrix} b_{psx}^{ij}\mathrm{I}_n & & & 0 \\ & b_{psy}^{ij}\mathrm{I}_n & & \\ & & b_{psz}^{ij}\mathrm{I}_n & \\ 0 & & & b_{ps\varphi}^{ij}\mathrm{I}_n \end{bmatrix} \equiv \ulcorner b_{ps\lrcorner}^{ij} \mathrm{I}_n. \quad (2\ 54)$$

Выполним последнее преобразование:

$$\ulcorner V\mathrm{I}_{m\lrcorner}^{\mathrm{T}} [\Lambda] \ulcorner V\mathrm{I}_{m\lrcorner} =$$

$$= \begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_m \ulcorner M_{\lrcorner N} [V] \mathrm{I}_m & & 0 \\ & [V]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_m \ulcorner M_{\lrcorner N} [V] \mathrm{I}_m & \\ \underbrace{0 \qquad\qquad\qquad\qquad}_{d} & & \ddots \; [V]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_m \ulcorner M_{\lrcorner N} [V] \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \omega^2; \quad (2.55)$$

$$[V]^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_m \ulcorner M_{\lrcorner N} \omega^2 [V] \mathrm{I}_m =$$

$$= \begin{bmatrix} [V]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner 4n} [V] & & 0 \\ & [V]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner 4n} [V] & \\ 0 & & \ddots \; [V]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner 4n} [V] \end{bmatrix} \omega^2; \quad (2.56)$$

$$[V]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner 4n} \omega^2 [V] = \begin{bmatrix} [X]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner n} [X] & & & \\ & [Y]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner n} [Y] & & \\ & & [Z]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner n} [Z] & \\ & & & [\psi]^{\mathrm{T}} \ulcorner I_{M\lrcorner n} [\psi] \end{bmatrix} \omega^2; \quad (2.57)$$

$$[X]^{\mathrm{T}} \ulcorner M_{\lrcorner n} \omega^2 [X] =$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^{(1)} X_1^{(2)} \dots X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)} X_2^{(2)} \dots X_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ X_n^{(1)} X_n^{(2)} \dots X_n^{(n)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} M & & 0 \\ & M & \\ 0 & & \ddots \; M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^{(1)} X_1^{(2)} \dots X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)} X_2^{(2)} \dots X_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ X_n^{(1)} X_n^{(2)} \dots X_n^{(n)} \end{bmatrix} \omega^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} M \sum_r X_r^{(1)^2} & M \sum_r X_r^{(1)} X_r^{(2)} & \dots M \sum_r X_r^{(1)} X_r^{(n)} \\ M \sum_r X_r^{(2)} X_r^{(1)} & M \sum_r X_r^{(2)^2} & \dots M \sum_r X_r^{(2)} X_r^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ M \sum_r X_r^{(n)} X_r^{(1)} & M \sum_r X_r^{(n)} X_r^{(2)} & M \sum_r X_r^{(n)^2} \end{bmatrix} \omega^2 = \begin{bmatrix} M & & 0 \\ & M & \\ 0 & & \ddots \; M \end{bmatrix} \omega^2 \equiv$$

$$\equiv M\mathrm{I}_n \omega^2. \quad (2.58)$$

Аналогично:

$$[Y]^{\mathrm{T}} \ulcorner M \lrcorner_n \omega^2 [Y] = M\mathrm{I}_n \omega^2; \tag{2.59}$$

$$[Z]^{\mathrm{T}} \ulcorner M \lrcorner_n \omega^2 [Z] = M\mathrm{I}_n \omega^2; \tag{2.60}$$

$$[\psi]^{\mathrm{T}} \ulcorner I_M \lrcorner \omega^2 [\psi] = I_M \mathrm{I}_n \omega^2. \tag{2.61}$$

С учетом выполненных преобразований уравнение (2.43) примет вид:

$$\left(\begin{bmatrix} \ulcorner \lambda_{s} \lrcorner_1 - \ulcorner M \lrcorner_N \omega^2 & & 0 \\ & \ulcorner \lambda_{s} \lrcorner_2 - \ulcorner M \lrcorner_N \omega^2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \ulcorner \lambda_{s} \lrcorner_d - \ulcorner M \lrcorner_N \omega^2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & \ldots & [B_{1d}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & \ldots & [B_{2d}] \\ [B_{d1}] & [B_{d2}] & \ldots & [B_{dd}] \end{bmatrix} \right) \{q\} = 0. \tag{2.62}$$

Поменяем нумерацию неизвестных, связав их не с вертикальными, а горизонтальными элементами.

Тогда уравнение (2.62)

$$\begin{bmatrix} [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(1)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 & & 0 \\ & [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(2)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & [\bar{B}] + \ulcorner \lambda^{(N)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \{\bar{q}_1\} \\ \{\bar{q}_2\} \\ \vdots \\ \{\bar{q}_n\} \end{bmatrix} = 0, \tag{2.63}$$

где $[\bar{B}]$ — матрица жесткости двумерного горизонтального элемента; $\ulcorner M \lrcorner$ — матрица узловых сосредоточенных масс.

Система уравнений (2.63) распалась на независимые группы, каждая из которых определяет свою серию частот собственных колебаний.

Приведенное доказательство распадаемости разрешающих уравнений на группы обобщается на пространственные перекрестные системы, состоящие из трех подсистем A, B, C. Однако наложенные выше ограничения должны распространяться и на подсистему C.

Распавшаяся на группы система разрешающих уравнений имеет вид:

$$([\bar{B}] + \ulcorner \lambda_A^{(i)} \lrcorner + \ulcorner \lambda_C^{(j)} \lrcorner - \ulcorner M \lrcorner \omega^2) \{\bar{q}\} = 0. \tag{2.64}$$

Матричное уравнение (2.64) описывает собственные колебания парциальной системы 2-го уровня, приведенной на рис. 2.5. В математическом смысле полученные решения представляют собой разделение пространства неизвестных на инвариантные подпространства меньшего размера.

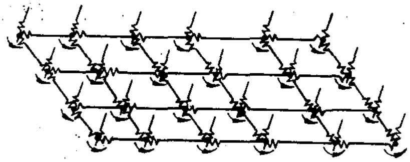

Рис. 2.5. Парциальная система 2-го уровня для пространственной перекрестной системы $A + B + C$.

Расчет вынужденных колебаний

Рассмотрим вынужденные колебания пространственной системы $A+B+C$.

Уравнения вынужденных колебаний в матричной форме имеют вид

$$([A]+[B]+[C])\{r\}+[D]\frac{\partial}{\partial t}\{r\}+\ulcorner M \lrcorner\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{r\}+\{F(t)\}=0, \quad (2.65)$$

где $[D]$ — матрица затухания (демпфирования); $\{F(t)\}$ — вектор узловых нагрузок.

Решение уравнения (2.65) получим традиционным способом в форме

$$\{r\}=[\{r_0\}_1, \{r_0\}_2, \ldots, \{r_0\}_{N\times d}]\cdot\{\delta\}\equiv[r_0]\cdot\{\delta\}, \quad (2.66)$$

где $\{r_0\}_i$ — нормированные собственные векторы, удовлетворяющие уравнению:

$$([A]+[B]+[C]-\ulcorner M \lrcorner\,\omega_i^2)\{r_0\}_i=0; \quad (2.67)$$

$\{\delta\}$ — вектор, компонентами которого являются коэффициенты пропорциональности при собственных функциях.

Подставим выражение (2.66) в уравнение (2.65) и результат умножим слева на $[r_0]^{\mathrm{T}}$

$$[r_0]^{\mathrm{T}}([A]+[B]+[C])[r_0]\{\delta\}+[r_0]^{\mathrm{T}}D[r_0]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\}+$$

$$+[r_0]^{\mathrm{T}}\ulcorner M \lrcorner[r_0]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}+[r_0]^{\mathrm{T}}\{F\}=0. \quad (2.68)$$

Как известно, собственные векторы $\{r_0\}_i$ ортогональны по массе

$$\{r_0\}_j^{\mathrm{T}}\ulcorner M \lrcorner\{r_0\}_i=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}. \quad (2.69)$$

Из (2.67) $([A]+[B]+[C])\{r_0\}_i=\ulcorner M \lrcorner\,\omega_i^2\{r_0\}_i.$ (2.70)

Умножим (2.70) слева на $\{r_0\}_j^{\mathrm{T}}$

$$\{r_0\}_j^{\mathrm{T}}([A]+[B]+[C])\{r_0\}_i=\{r_0\}_{\mathrm{T}i}\ulcorner M \lrcorner\{r_0\}_i\,\omega^2=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \omega_i^2 & i=j\end{cases}. \quad (2.71)$$

Предположим, что выполняется равенство *

$$\{r_0\}_j^{\mathrm{T}}[D]\{r_0\}_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 2\omega_i d_i & i = j. \end{cases} \qquad (2.72)$$

Условия (2.69)—(2.72) приводят к распадаемости матричного дифференциального уравнения (2.68):

$$\omega_1^2\delta_1 + 2\omega_1 d_1 \frac{\partial}{\partial t}\delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta_1 = -\{r_0\}_1^{\mathrm{T}}\{F\};$$

$$\omega_2^2\delta_2 + 2\omega_2 d_2 \frac{\partial}{\partial t}\delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta_2 = -\{r_0\}_2^{\mathrm{T}}\{F\}; \qquad (2.73)$$

$$\omega_\rho^2\delta_\rho + 2\omega_\rho d_\rho \frac{\partial}{\partial t}\delta_\rho + \frac{\partial}{\partial t^2}\delta_\rho = -\{r_0\}_\rho^{\mathrm{T}}\{F\},$$

где ρ — число динамических степеней свободы пространственной системы.

Решение для i-го уравнения (2.73) имеет вид

$$\delta_i = -\int_0^t \{r_0\}_i^{\mathrm{T}}\{F\}\, e^{-C\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2.74)$$

Подставляя (2.74) в (2.66), получаем полное решение пространственной задачи.