

**Особенности расчета спектра собственных частот колебаний
сложных конструкций**

Наиболее ответственным этапом при динамическом расчете является определение частот и форм свободных колебаний конструкций зданий, так как получаемая при этом информация является исходной для последующего анализа и может быть использована при обосновании технических решений.

Традиционные расчетные схемы недостаточно полно отражают индивидуальные особенности сложных конструкций и не учитывают факторы, способные существенно влиять на результаты расчета.

Уточненная оценка спектра собственных частот и форм колебаний необходима при обосновании надежности зданий повышенной этажности, строительство которых в настоящее время признано экономически целесообразным.

По методу конечных элементов (МКЭ) можно с любой степенью подробности построить физическую модель исследуемой конструкции, располагая соответствующим набором конечных элементов (КЭ) и алгоритмом вычисления матриц их динамических жесткостей (МД), т. е. совокупностью матриц жесткостей (МЖ) и матриц масс (ММ). Формирование результирующего частотного уравнения сводится к суммированию коэффициентов МД КЭ по определенному правилу. При этом необходим высокий порядок частотного уравнения, решение которого является самостоятельной проблемой.

Стремление к повышению точности математической модели приводит к оперированию так называемыми λ -матрицами и обобщенным частотным уравнением

$$[K(\lambda)] = 0, \quad (1.1)$$

где $[K(\lambda)]$ — матрица динамической жесткости системы, являющаяся функцией частотного параметра λ .

Итерационный путь решения (1.1) без предварительной оценки величины искомого частотного параметра λ требует неоправданно больших затрат машинного времени, поэтому рассматривается усеченное частотное уравнение

$$[K] - \lambda [M] = 0. \quad (1.2)$$

Первые собственные значения (1.1) и (1.2) отличаются незначительно, но с возрастанием λ эта разница заметно увеличивается, поэтому при анализе высокочастотных колебаний необходима ре-

лизация выражения (1.1), что предполагает разработку уточненных МД КЭ и специальных алгоритмов решения обобщенного частотного уравнения.

Вопрос о реализации выражения (1.1) высокого порядка, несмотря на актуальность, до сих пор оставался открытым. Существующие классические методы решения (1.2) предполагают приведение исходного уравнения к специальному виду. В процессе традиционных методов приведения выражения (1.2) нарушается ленточная структура матриц, что резко снижает эффективность известных алгоритмов решения частотного уравнения специального вида и затрудняет их использование при решении практических задач.

Указанных недостатков лишены разработанные методы динамического расчета сложных конструкций.

Реализация метода конечных элементов

Теоретические положения МКЭ достаточно широко освещены в работах [8—17] и др. Рассмотрим основные этапы его реализации применительно к динамическому расчету упругих систем.

Первым шагом реализации метода являются построение и дискретизация (расчленение) физической модели исследуемой конструкции на ряд КЭ с упрощенными геометрическими и физическими характеристиками. Эти элементы взаимодействуют между собой в конечном числе узловых точек, характер взаимодействия определяется свойствами МД КЭ.

Согласно определению упругой конструкции для каждого КЭ справедливы энергетические зависимости:

$$П_e = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_e] \{q_e\}; \quad (1.3)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [M_e] \{\dot{q}_e\}, \quad (1.4)$$

где $П_e$ — потенциальная энергия КЭ; T_e — кинетическая энергия КЭ; $\{q_e\}$ — компоненты вектора обобщенных перемещений дискретной модели конструкции, относящиеся к узлам данного КЭ; $\{\dot{q}_e\}$ — то же, вектора обобщенных скоростей; $[K_e]$ — матрица жесткости КЭ; $[M_e]$ — матрица масс КЭ.

Сравнение (1.3) и (1.4) с интегральным представлением соответствующих энергий дает простой путь получения коэффициентов МЖ или ММ КЭ. Так, для простейшего КЭ конструкции (рис. 1.1, а) при продольных колебаниях соответствующие выражения будут иметь вид:

$$П_e = \frac{EF}{2} \int_0^1 (U')^2 d\xi; \quad (1.5)$$

$$T_e = \frac{m}{2} \int_0^l (\dot{U})^2 d\xi, \quad (1.6)$$

где EF — жесткость на растяжение КЭ; $U(\xi, t)$ — продольное перемещение; l — длина КЭ стержня; m — погонная масса; $\xi = x/l$ — безразмерная координата.

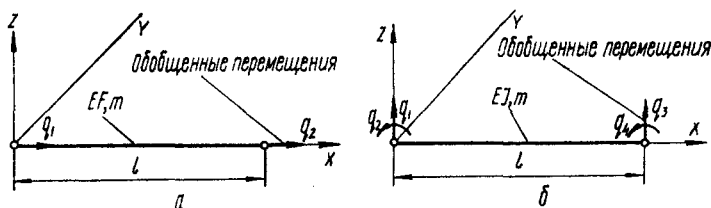


Рис. 1.1. Конечные элементы стержня при продольных (а) и изгибных (б) колебаниях.

Произведем подстановку в (1.5) и (1.6) формы, аппроксимирующей продольные перемещения. Тогда

$$U(\xi, t) = \sum_i \Theta_i(\xi) q_i(t) \quad \text{при } i = 1, 2, \quad (1.7)$$

где $\Theta_1(\xi) = 1 - \xi$; $\Theta_1(0) = 1$; $\Theta_1(1) = 0$,
 $\Theta_2(\xi) = \xi$; $\Theta_2(0) = 0$; $\Theta_2(1) = 1$.

Результаты подстановки (1.7) в (1.3) и (1.6) и сравнение найденной квадратичной формы с (1.3) и (1.4) дают искомые матрицы КЭ стержня

$$[K_e] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad [M_e] = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

В основе формирования результирующего частотного уравнения лежит соблюдение энергетического баланса исходной конструкции и ее дискретной модели, что можно выразить соотношениями:

$$П = \sum_e П_e; \quad (1.9)$$

$$T = \sum_e T_e \quad \text{при } e = 1, 2, \dots, n,$$

где $П, T$ — потенциальная и кинетическая энергии конструкции; n — количество КЭ дискретной модели.

Подстановка (1.9) в уравнение Лагранжа второго рода приводит к однородной системе дифференциальных уравнений (диссипативной функцией при анализе собственных колебаний пренебрегаем) следующего вида

$$[K] \{q\} + [M] \{\ddot{q}\} = 0. \quad (1.10)$$

Система (1.10) удовлетворяет решению:

$$\{q\} = \{V\} \sin \lambda t, \quad (1.11)$$

где λ — собственная круговая частота колебаний рассматриваемой конструкции; $\{V\}$ — вектор форм собственных колебаний.

Подставив (1.11) в (1.10), получим:

$$([K] - \lambda[M]) V = 0, \quad (1.12)$$

где λ — частотный параметр.

Условие нетривиальности решения (1.12) приводит к результирующему частотному уравнению

$$|[K] - \lambda[M]| = 0. \quad (1.13)$$

Сложность решения (1.13) традиционными методами заключается в том, что для определения параметров λ необходимо найти матрицу, обратную $[M]$. В результате обращения получится заполненная симметричная матрица. Процедура обращения матриц высокого порядка требует неоправданно большого объема машинного времени. Наконец, умножение (1.13) на обратную матрицу $[M^{-1}]$ приводит к классической форме задачи на собственные значения

$$|[M]^{-1}([K] - \lambda[M])| = |[\bar{K}] - \lambda[E]| = 0. \quad (1.14)$$

В общем случае $[\bar{K}]$ является заполненной несимметричной матрицей, нахождение собственных значений которой при достаточно высоком порядке представляет самостоятельную проблему.

Таким образом, указанные обстоятельства затрудняют использование (1.14) в качестве математической модели, отражающей динамические свойства сложных конструкций.

Рассмотрим получение специального частотного уравнения с диагональной матрицей масс, решение которого приводит практически к тем же результатам, что и решение усеченного частотного уравнения (1.13), но гораздо проще.

Заметим, что при каноническом виде квадратичной формы (1.4) результирующая матрица масс системы будет диагональной. Приведем (1.4) к каноническому виду. Допустим, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех КЭ при их движении как твердых тел.

Это допущение является более общей формой широко используемого в динамических расчетах допущения о возможности замены распределенной массы сосредоточенными и, как будет показано, приводит к незначительной погрешности при динамическом расчете реальных конструкций.

В этом случае кинетическая энергия, аккумулируемая КЭ,

$$T_e = \frac{1}{2} \{\tilde{q}_e\}^T [M_e] \{\tilde{q}_e\}, \quad (1.15)$$

где $\{\tilde{q}_e\}$ — вектор обобщенных скоростей КЭ.

Положение КЭ в пространстве при движении как твердого тела

определяется компонентами вектора перемещений лишь одного узла, поэтому (1.4) будет иметь вид

$$T'_e = \frac{1}{2} \sum_i (m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{in}) \dot{q}_i^2, \quad (1.16)$$

где i — номера обобщенных перемещений узла, определяющих ориентацию КЭ в пространстве; n — количество узлов КЭ.

Равенство (1.16) получено на основании следующих рассуждений.

При принятых допущениях скорость движения КЭ определяется вектором скорости движения его центра тяжести. Если рассматривать отдельно приращения кинетической энергии КЭ при движении по направлению каждого обобщенного перемещения, то получим (1.16) как результат сложения парциальных энергий.

Например, приращение кинетической энергии КЭ стержня при изгибных колебаниях (рис. 1.1, б), соответствующее поступательному движению, можно вычислить так:

$$\Delta T_e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [(m_{11} + m_{12}) \dot{q}_1^2 + (m_{31} + m_{33}) \dot{q}_1^2], \quad (1.17)$$

где \dot{q}_1 — скорость поступательного движения центра тяжести КЭ.

Аналогичное соотношение можно получить, рассматривая движение КЭ как твердого тела по другим обобщенным направлениям.

Заметим, что преобразование типа (1.17) с полным вектором $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2\}^T$ приводит к диагональной матрице, определяющей квадратичную форму канонического вида. Побочные коэффициенты формы с нечетной суммой индексов при сложении сокращаются.

Таким образом, в выражении (1.17) под знаком суммы стоят коэффициенты квадратичной формы канонического вида, а матрица $[\tilde{M}_e]$ является диагональной.

Покажем, что приращение кинетической энергии, вызванное диагонализацией ММ КЭ, имеет положительный знак и приводит к уменьшению расчетного значения частотных параметров.

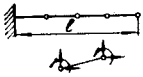
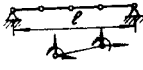
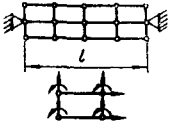
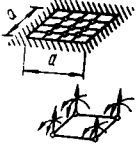
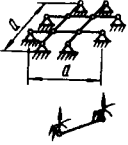
Рассмотрим КЭ стержня при продольных (чисто сдвиговых) колебаниях. Матрица масс КЭ и диагональная ММ имеют вид:

$$[M_e] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; \quad [\tilde{M}_e] = \begin{bmatrix} (m_{11} + m_{12}) & 0 \\ 0 & (m_{21} + m_{22}) \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Сравнение кинетических энергий КЭ с матрицами масс и $[\tilde{M}_e]$ дает разницу

$$\delta = \sum_i \sum_j (\tilde{m}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j) = m_{12} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 \text{ при } i, j = 1, 2, \quad (1.19)$$

Таблица 1.1

Используемый КЭ	Расчетная схема	Кол-во узлов	Погрешность, проц., при номере частоты					Примечание
			1	2	3	4	5	
Консольная балка		1	3,5	—	—	—	—	Сдвиг не учтен
		2	1,0	0,5	0,6	—	—	
		3	0,2	0,3	0,4	2,0	—	
		4	0,0	0,1	0,2	0,5	3,0	
Свободно опертая балка		3	2,5	—	—	—	—	Сдвиг учтен
		5	0,1	3,5	2,5	5	—	
		7	0,0	0,5	1,5	2,0	6,0	
Балка-стенка		9	5,2	—	—	—	—	Сравнение с результатами балочной теории Сдвиг учтен
		12	3,1	6,1	—	—	—	
		15	0,5	2,0	5,1	—	—	
		18	0,2	1,2	2,0	7,3	10,0	
Железобетонная пластина		4	5,1	8,9	8,9	—	—	—
		9	5,0	7,1	7,1	—	—	
		16	2,0	5,1	5,1	9,0	—	
		48	0,0	—	—	0,0	0,01	
Свободно опертое перекрытие		12	0,2	0,5	0,5	—	—	Использовано решение в рядах
		24	0,1	0,3	0,3	2,0	—	
		36	0,0	0,2	0,2	2,0	1,5	
		48	0,0	0,0	0,0	1,4	1,5	

где $m_{12} > 0$ по физическому смыслу.

Выражение (1.19) позволяет сделать следующие выводы:

при движении КЭ как твердого тела, т. е. при $q_1 = q_2$ использование диагональной ММ дает точное решение ($\delta = 0$);

при $q_1 \neq q_2$ диагонализация ММ приводит к уменьшению расчетного значения частотного параметра;

приращение кинетической энергии положительно и пропорционально квадрату разности одноименных обобщенных скоростей узлов отдельных КЭ.

Проведем аналогичный анализ влияния диагонализации ММ КЭ стержня при изгибных колебаниях. Кинетическая энергия КЭ с полной и диагональной ММ может быть представлена следующим

$$\text{образом: } T_e = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \text{ при } i, j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\tilde{T}_e^1 = \frac{1}{2} [(m_{11} + m_{13}) \dot{q}_1^2 + (m_{22} + m_{24}) \dot{q}_2^2 + (m_{31} + m_{33}) \dot{q}_3^2 + (m_{41} + m_{44}) \dot{q}_4^2]. \quad (1.20)$$

Разность энергий

$$\delta = \tilde{T}_e' - T_e = m_{13} (\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 + m_{24} (\dot{q}_2 - \dot{q}_4)^2 - (\dot{q}_1 \dot{q}_3 m_{12} + \dot{q}_2 \dot{q}_3 m_{23} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 m_{14} + \dot{q}_3 \dot{q}_4 m_{34}). \quad (1.21)$$

Знак и величина δ определяются значением компонентов вектора узловых скоростей КЭ. Считая КЭ жестким телом, допустимо принять углы поворота узлов КЭ:

$$q_2 \sim q_4 \approx \frac{q_1 - q_3}{l}. \quad (1.22)$$

В таком случае

$$\delta = (\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 \left(m_{13} - \frac{m_{12}}{l} + \frac{m_{23}}{l} \right) > 0. \quad (1.23)$$

Здесь использованы соотношения: $m_{12} = -m_{34}$; $m_{23} = -m_{14}$. Заметим, что при $q_1 = q_3$ и $q_2 = q_4$ приращение $\delta = 0$.

Таким образом, можно утверждать, что для реальных расчетных схем диагонализация ММ КЭ приводит к уменьшению значения частотного параметра, вычисленного для той же конструкции, но с использованием заполненной матрицей масс. Этот факт был подтвержден с помощью численного эксперимента на ЭЦВМ при расчете различных конструкций в стержневой, пластинчатой и пластинчато-стержневой аппроксимациях.

В качестве иллюстрации скорости сходимости решений в табл. 1.1 приведены результаты расчетов некоторых конструкций в сравнении с имеющимися аналитическими решениями.

Алгоритм решения частотного уравнения с диагональной матрицей масс

Для определения частот собственных колебаний упругих систем в научно-исследовательском отделе Одесского института инженеров морского флота разработан специальный алгоритм, использующий преимущества полученного частотного уравнения с диагональной матрицей масс:

$$|[K] - \lambda [\tilde{M}]| = 0, \quad (1.24)$$

где $[\tilde{M}]$ — диагональная матрица масс конструкции.

Конгруэнтное преобразование (1.24) приводит к классической форме задачи на собственные значения:

$$\left| [\tilde{M}]^{-\frac{1}{2}} ([K] - \lambda [\tilde{M}]) [\tilde{M}]^{-\frac{1}{2}} \right| = |[\tilde{K}] - \lambda [E]|. \quad (1.25)$$

Обращение $[\tilde{M}]$ и преобразование (1.25) не требуют особых затрат машинного времени.

Стандартные программы решения (1.25) ориентированы на обработку заполненных матриц [6, 7], поэтому их использование нецелесообразно.

Рассмотрим основные моменты реализации (1.25) по разработанному алгоритму, учитывающему структуру приведенной симметричной матрицы жесткости $[K]$.

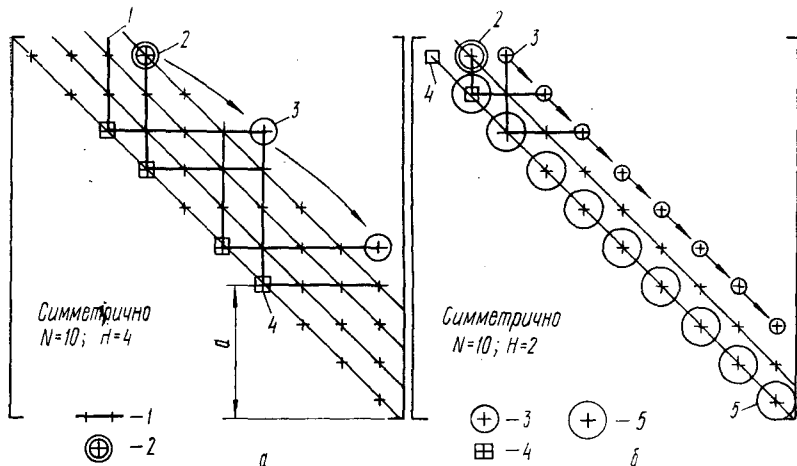


Рис. 1.2. Схемы преобразования K в K_3 (а) и приведения K_3 к диагональной форме (б):

1 — элементы, участвующие в преобразованиях; 2 — обнуляемый элемент 1-го шага; 3 — исключаемые побочные коэффициенты; 4 — ведущие элементы ведущего шага в позиции (а), то же, обнуления в позиции (б); 5 — ведущие элементы исключения.

Приведем $[K]$ к трехдиагональной форме, используя метод плоских вращений [6].

Рис. 1.2, а иллюстрирует приведение выражения (1.25) к трехдиагональной форме. Характерно, что на каждом шаге приведения участвует лишь часть матрицы размером $(H \times H)$, что существенно повышает порядок анализируемого частотного уравнения.

Преобразованное частотное уравнение

$$|[L]^T ([\tilde{K}] - \lambda[E]) [L]| = |[K_3] - \lambda[E]|, \quad (1.26)$$

где $[K_3]$ — симметричная трехдиагональная матрица; $[L]$ — матрица преобразований, которая строится по правилу $[L] = [L_1][L_2] \dots [L_m]$.

$$[L_i] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & c & s & & \\ & & -s & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \omega &= (k_{mj}^2 + k_{mj}^2 + 1)^{1/2}; \\ c &= k_{jj}/\omega, \quad s = k_{j+1, j+1}/\omega_i, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где m, j — координаты обнуляемого элемента k_{mj} .

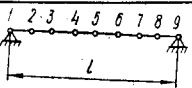
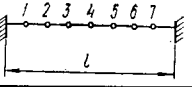
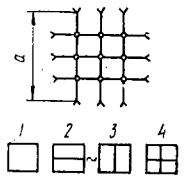
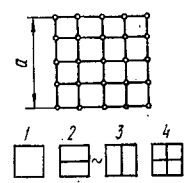
Анализ собственных значений $[K_3]$ осуществляется по новому алгоритму, который сочетает известные методы Шварца и Якоби [6, 7]. На i -м шаге производим ортогональное преобразование $[K_3]$, в результате которого обнуляется побочный коэффициент $[K_{12}]$, стоящий на второй диагонали (рис. 1.2, б), обнуляемый элемент обозначен двойной окружностью; при этом одновременно появляется отличный от нуля коэффициент на третьей диагонали K_{13} (обозначен малой окружностью). Элементы матриц ортогональных преобразований:

$$p = \frac{1}{2} (k_{i+1, i+1} - k_{ii}); \quad \omega = \operatorname{sgn}(p) \frac{k_{i, i+1}}{\sqrt{k_{i, i+1}^2 + p^2}}; \quad (1.28)$$

$$s = \frac{\omega}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \omega^2})}}; \quad c = \sqrt{1 - s^2}.$$

Для исключения k_{13} выполняется ряд ортогональных преобразований, результатом которых является последовательное (по стрелке) обнуление коэффициентов, стоящих на третьей диагонали. Эле-

Таблица 1.2

Конструкция	Расчетная схема	Узлы	МКЭ при формуле			Аналитическое решение при формуле			ϵ , проц.
			1	2	3	1	2	3	
Свободно опертая балка		3 5 7	0,7 1,0 0,7	1,0 0,01 0,99	-0,7 0,0 -0,7	0,7 1,0 0,7	1,0 0,0 -1,0	0,7 1,0 -0,7	< 1
Железобетонная заделанная балка		2 4 6	0,55 1,00 0,55	1,0 0,01 1,0	-0,9 1,0 -0,92	0,55 1,0 0,55	1,0 0,0 1,0	-0,91 1,0 -0,91	—
Свободно опертая перекрытие Узловые линии форм		5 11 17	0,71 1,0 0,71	1,0 0,01 -0,99	1,0 -0,01 -1,0	0,71 1,00 0,71	1,0 0,0 -1,0	-1,0 0,0 1,0	—
Свободно опертая пластина Узловые линии форм		7 13 19	0,71 1,0 0,71	1,0 -0,01 -1,0	1,0 -0,01 -1,0	0,71 1,0 0,71	1,0 0,0 -1,0	-1,0 0,0 1,0	—

менты матриц соответствующих преобразований вычисляются по выражению (1.27). При циклической процедуре исключения побочных коэффициентов $k_{i\alpha}$ в обработке участвуют лишь две диагонали матрицы $[K_3]$, что в принципе открывает возможность реализации частотных уравнений высокого порядка без обращения к внешним носителям информации. В результате обнуления побочных коэффициентов на главной диагонали $[K_3]$ вычисляют искомые собственные значения.

Поскольку итерационная часть расчета связана лишь с обработкой простейшей симметричной трехдиагональной матрицы, определение широкого спектра ее собственных значений (частотных параметров) занимает сравнительно мало машинного времени.

Таким образом, разработанные методы получения и решения специального частотного уравнения (1.25) являются эффективным средством прогнозирования динамических характеристик сложных конструкций.

Высокая точность определения собственных значений способствует повышению точности вычисления соответствующих векторов (форм свободных колебаний). При определении вектора формы свободных колебаний используется процедура Гаусса. Примеры расчета форм и оценка точности приведены в табл. 1.2.

Верхняя оценка спектра собственных частот с использованием энергетических зависимостей

Предыдущие этапы динамического расчета (за исключением обработки трехдиагональной матрицы) выполняют прямыми методами, что является несомненным достоинством разработанного алгоритма. Верхняя оценка спектра собственных частот также осуществляется прямым методом и реализует модифицированную формулу Релея:

$$\lambda = \frac{\sum_e \{V_e\}^T [K_e] \{V_e\}}{\sum_e \{V_e\}^T [M_e] \{V_e\}}, \quad (1.29)$$

где $[K_e]$ и $[M_e]$ — заполненные МЖ и ММ e -го КЭ; $\{V_e\}$ — форма свободных колебаний e -го КЭ в составе конструкции.

При вычислении частотного параметра λ по формуле (1.29) отпадает необходимость формирования МЖ и ММ конструкции-процедуры, требующей значительного количества машинного времени.

Наибольший интерес представляет информация о 3—5 тонах собственных колебаний конструкций, точность вычисления которых оказывается удовлетворительной при реализации этого метода оценки спектра частот. Поэтому привлечение второго, уточненного метода, как правило, необходимо лишь при расчете высших гармоник колебаний.

Высокий порядок частотного уравнения, а также ограниченные возможности ЭВМ не позволяют его обработку в целом, а многократное обращение к внешним носителям информации приводит к резкому увеличению времени расчета.

Рассмотрим основные теоретические положения и этапы реализации алгоритма последовательного анализа частотного уравнения, который лишен указанного существенного недостатка. Предварительно покажем, что в результате прямого хода по Гауссу для матрицы динамической жесткости (МД), вычисленной для некоторого приближенного значения λ (энергетическим методом), на главной диагонали полученной треугольной матрицы будут стоять коэффициенты соответствующей квадратичной формы канонического вида.

Произведем разложение МД по известной схеме Халецкого

$$[K(\lambda_1)] = [C]^T [D]^{-1} [C], \quad (1.30)$$

где $[C]$ — треугольная матрица разложения; $[D]$ — диагональная матрица, элементы которой соответствуют диагональным элементам преобразованной в результате прямого хода по Гауссу МД.

Матрица МД определяет некоторую квадратичную форму:

$$f(q) = \{q\}^T [K(\lambda_1)] \{q\}. \quad (1.31)$$

Приведем (1.31) к каноническому виду с помощью линейного преобразования

$$\{q\} = [C]^{-1} [D] \{q_1\}. \quad (1.32)$$

После подстановки (1.32) в (1.31)

$$f(q) = \{q_1\}^T [D] \{q_1\}. \quad (1.33)$$

Поскольку матрица $[D]$ является диагональной, ее элементами будут коэффициенты при квадратах обобщенных координат.

Таким образом, матрица $[D]$ определяет квадратичную форму канонического вида, для которой справедлива теорема Рауса о соответствии отрицательных коэффициентов квадратичной формы номеру собственного значения исходной матрицы. Отсюда вытекает возможность, не вычисляя определителя МД, судить о положении числа λ_1 в спектре собственных значений, для чего используется известный критерий о степени неустойчивости [14].

При анализе частотного уравнения достаточно на каждой итерации произвести вычисление коэффициентов $[D]$ (осуществить прямой ход по Гауссу) и, применяя указанный критерий, уточнить положение λ_1 в спектре частот.

Несмотря на актуальность проблемы уточненной оценки спектра собственных частот, решение соответствующего частотного уравнения высокого порядка стало возможным лишь в рамках излагаемого ниже алгоритма его последовательного анализа.

В основе алгоритма лежит независимость получения каждого коэффициента квадратичной формы $[D]$ от всех последующих. Указанное свойство позволяет построить эффективную процедуру вычисления этих коэффициентов, основанную на последовательном

приведении МД к треугольной форме с одновременным формированием текущих строк матриц.

На первом шаге производится формирование $(H+z)$ строк МД, при этом максимально возможное количество строк z определяется из расчета $(H+z_{\max}) \cdot H \leq S$. Величина S связана с возможностями принятой ЭЦВМ ($S=10000$, например, для «ЕС-1020»). Затем вычисляются z коэффициентов $[D]$ с помощью прямой процедуры Гаусса. Каждая из обработанных строк записывается на место предыдущей, т. е. осуществляется передвижка всей матрицы (вернее, сформированной ее части) на строку вверх. Передвижка не требует дополнительного машинного времени.

В результате выполнения первого шага полезная информация, участвующая на следующем этапе процедуры, будет всегда находиться в первых H строках, а на месте нижних — формируются недостающие z строк.

Подсчет количества отрицательных диагональных элементов \bar{c} позволяет судить о целесообразности выполнения следующего шага. Если \bar{c} превышает или равно номеру искомого частотного параметра, производится уточнение его значения (вычисление поправки $\Delta\lambda_1$), и процедура возобновляется при новом, уточненном значении частотного параметра. В том случае, если поправка к частотному параметру $\Delta\lambda_1$ не превышает 5 % квадрата искомой частоты, расчет прекращается, происходит автоматический переход к уточнению следующего частотного параметра. Расчет спектра продолжается до тех пор, пока не будет найдено нужное количество частот.

Информация, полученная при расчете собственных колебаний конструкций, используется для нахождения амплитуд вынужденных колебаний с учетом диссипативных сил.

Инженерный метод расчета амплитуд вынужденных колебаний

В терминах МКЭ математическое содержание задачи о вынужденных колебаниях формулируется следующим образом:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}, \quad (1.34)$$

где $[C]$ — матрица демпфирования конструкции; $\{F\}$ — вектор внешних сил, являющихся функцией времени; $\{\cdot\}$ — дифференцирование по времени.

Решение (1.34) при гармонических внешних силах

$$\{q\} = \{q_1\} \cos \omega t + \{q_2\} \sin \omega t, \quad (1.35)$$

где ω — круговая частота изменения вектора внешних сил. Подстановка (1.35) в (1.34) и сравнение коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях приводит к системе матричных уравнений

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 [M] & \omega [C] \\ -\omega [C]^T & [K] - \omega^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (1.36)$$

Произведем сложение матриц — блоков:

$$[K_\omega] = [K] - \omega^2 [M]; \quad [C_\omega] = \omega [C]. \quad (1.37)$$

Тогда (1.36) преобразуется к виду:

$$\begin{bmatrix} [K_\omega] & [C_\omega] \\ -[C_\omega]^T & [K_\omega] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.38)$$

Решение (1.38) получим, используя подстановку выражения вектора $\{q_1\}$, найденного из первой строки матричной системы уравнений, во вторую строку системы:

$$\begin{aligned} \{q_1\} &= [K]^{-1} \{F\} - [K]^{-1} [C] \{q_2\}; \\ ([K] + [C]^T [K]^{-1} [C]) \{q_2\} &= [C]^T [K]^{-1} \{F\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Несмотря на очевидность алгоритма получения (1.39), реализация (1.35) по приведенной схеме связана с большими трудностями вычислительного характера при обработке заполненных матриц высокого порядка. Ограниченные возможности ЭЦВМ, а также неопределенность закона распределения демпфирующих характеристик конструкций делают нецелесообразным расчет их вынужденных колебаний с использованием уточненной математической модели.

Информация о характеристиках свободных колебаний (обязательная при анализе динамических свойств) с успехом может быть использована для инженерной оценки параметров вынужденных колебаний.

Разработанный алгоритм вынужденных колебаний базируется на широко используемом в строительной механике и динамике сооружений приеме представления решения в виде разложения по формам собственных колебаний исследуемой конструкции.

Рассмотрим основные этапы реализации этого инженерного метода расчета вынужденных колебаний в рамках МКЭ.

Представим решение (1.34) в виде

$$\{q\} = \sum_i a_i \{\bar{V}_i\}, \quad (1.40)$$

где $\{\bar{V}_i\}$ — i -я форма свободных колебаний конструкции; a_i — коэффициенты разложения, являющиеся функциями времени. Для удобства последующих вычислений формы $\{\bar{V}_i\}$ нормированы по правилу: $\{\bar{V}_i\} [M] \{\bar{V}_i\}^T = 1$, где $[M]$ — матрица масс конструкции.

Подстановка (1.40) в (1.34) и умножение результата на вектор $\{\bar{V}_i\}$ даст (с учетом свойства ортогональности форм $\{\bar{V}_i\}$ и $\{\bar{V}_i\}$) систему разделенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{a}_i + 2\lambda_i c_i a_i + \lambda_i^2 a_i = f_i, \quad (1.41)$$

где λ_i — круговая частота собственных колебаний конструкции; c_i — обобщенная характеристика демпфирования конструкции; f_i — обобщенная сила, являющаяся функцией времени.

Обобщенная сила может быть произвольной функцией времени. При гармоническом законе изменения $\{F\}$ частное решение (1.41)

имеет следующий вид (индекс опущен):

$$a = \alpha \frac{f}{x^2} \cdot \cos(\omega t - \delta), \quad (1.42)$$

где $\alpha = [(1-z^2)^2 + 4c^2z^2]^{-1/2}$ — коэффициент динамичности; f — амплитудное значение обобщенной силы; δ — запаздывание по фазе вынужденных колебаний по отношению к силе, $\cos \delta = \alpha(1-z^2)$, $z = \omega/\lambda$. При резонансе $z=1$ коэффициент динамичности α , определяющий отношение максимального перемещения к статическому, зависит лишь от величины c . Отсюда вытекает важность точного определения демпфирующих характеристик конструкций.

Основным достоинством изложенного варианта расчета является возможность оперативной оценки параметров вынужденных колебаний сложных систем и соответствие современному уровню знаний исходной к расчету информации.

Как показал анализ результатов расчетов вынужденных колебаний конструкций зданий, для достижения удовлетворительной точности достаточно удержать 3—5 членов ряда (1.40).

Алгоритмы расчетов собственных и вынужденных колебаний упругих конструкций реализованы в виде системы ФОРТРАН-программ, ориентированных на современные ЭВМ.

Основные особенности системы алгоритмов и программ динамического расчета по МКЭ

Алгоритм расчета свободных и вынужденных колебаний реализован в ОИИМФ в виде системы программ, построенных по модульному принципу (см. рис. 1.3). Модульный принцип построения системы характерен для современных алгоритмов и соответствующих программ решения различных технических задач на ЭВМ и придает определенную универсальность входящим программным блокам.

Основными принципами, которыми руководствовались авторы при разработке алгоритмов и программ динамического расчета, были следующие:

— возможность с достаточной для практических целей точностью выполнения расчета сложных конструкций на наиболее распространенных машинах средней мощности;

— максимальная универсальность программной системы и возможность ее использования для различных видов расчетов с сохранением структуры и последовательности ввода исходной информации;

— автоматизация поиска ошибок в исходной информации, автоматизация расчета параметров результирующей системы, а также других промежуточных расчетов, базирующихся на логических возможностях ЭВМ;

— повышение наглядности и лаконичности результирующей (и исходной) информации.

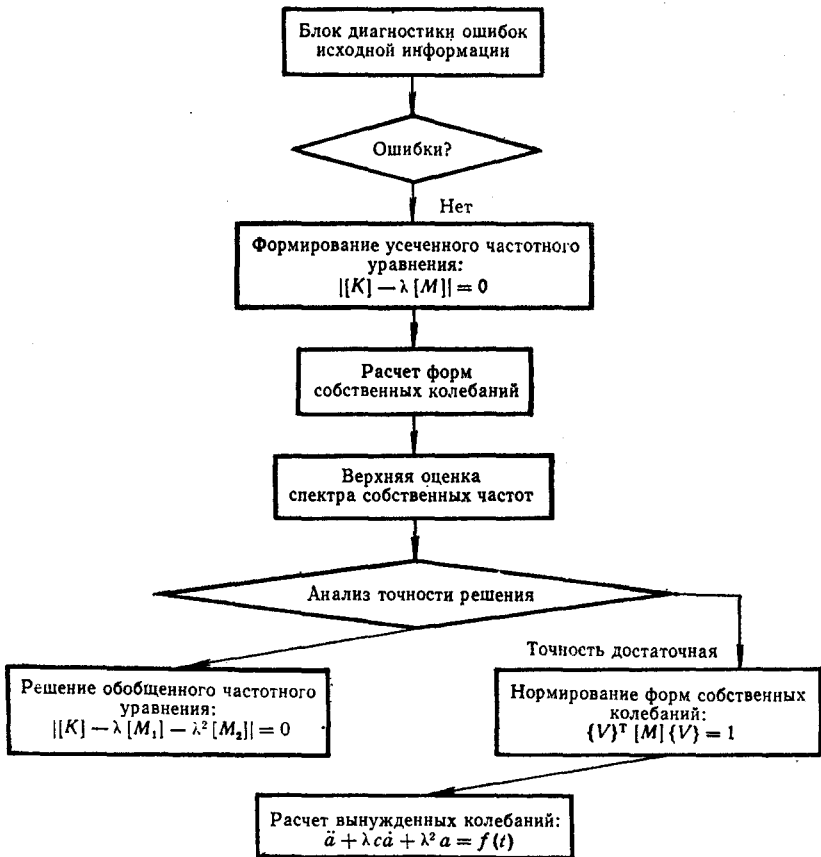


Рис. 1.3. Укрупненная блок-схема системы программы динамического расчета упругих систем.

Рассмотрим некоторые особенности выполнения отдельных этапов динамического расчета.

Идеализация конструкции. Идеализация конструкции, т. е. ее дискретное представление в виде ансамбля конечных элементов (КЭ), наделенных определенными физическими свойствами, является наиболее ответственным этапом динамического расчета, от которого зависят достоверность и практическая ценность результирующей информации.

Сочетание (стыковка) различных типов КЭ, входящих в программную библиотеку (табл. 1.3), позволяет построить достаточно подробную физическую модель типичных для строительных конструкций пластинчато-стержневых систем. Пример дискретизации поперечной стены многоэтажного здания с использованием КЭ различных типов приведен в гл. 4 (рис. 4.6). Для стыковки необходимо

соблюдение одного условия — одинаковое количество обобщенных перемещений в узлах, объединяемых (смежных) КЭ.

Для описания типа и ориентации КЭ вводится понятие матрицы топологии (МТ), являющейся наиболее лаконичной формой табличной схематизации физической модели КК.

МТ представляет развитие известной в статических расчетах

Таблица 1.3

Номер КЭ	Схема расположения узлов	Типы конструкций	Порядок МД	Стыкуется с КЭ
1		Плоские фермы	4	1-й с 4, 5
2		Рамы, арки	6	2-й с 5—8
3		Перекрытия	6	3-й с 4, 6—8
4		Пластины произвольного очертания	6	4-й с 1, 5
5		Прямоугольные пластины	8	5-й с 1, 4
6		—	12	6-й с 2, 3, 7
7		—	12	7-й с 2, 3, 6
8		Коробчатые конструкции	24	8-й с 2, 3, 6, 7

упругих конструкций по МКЭ [14] матрицы индексов, но несмотря на свою компактность, несет большую смысловую нагрузку.

Количество строк МТ соответствует количеству КЭ всей конструкции, а число столбцов равно $R+2$. Величина R принимается равной максимальному количеству узлов КЭ, участвующих в ансамбле. Первые R столбцов содержат перечисление номеров узлов соответствующего КЭ в строгой последовательности, определяемой при получении матрицы динамической жесткости (МД)

данного элемента, два последних — информацию о типах параметров (геометрических и физических характеристиках) КЭ и номерах МД. Заметим, что МТ является не только наглядным и эффективным средством описания ансамбля КЭ и позволяет быстро определить обобщенные характеристики каждого элемента, но и, кроме того, играет роль управляющего массива при формировании результирующего частотного уравнения.

Формирование результирующего частотного уравнения с использованием матрицы топологии системы. Информации, заключенной в МТ, как обобщенной характеристики конструкции, недостаточно для формирования результирующего уравнения. Наряду с массивом общих характеристик дискретной модели конструкции (количество КЭ, узлов и т. п.) при расчете необходима информация о параметрах каждого КЭ. Матрица типов параметров (МП) в каждой строке содержит перечисление параметров (плотность, размеры, физические константы и т. п.) соответствующих типов КЭ, порядок перечисления которых определяется типом принятой МД.

Необходима также информация о так называемых узлах (с неполным числом степеней свободы), а также о парах шарнирных узлов (имеющих некоторые одинаковые обобщенные перемещения). На основании этой информации автоматически формируется матрица индексов узлов (МИ), размер которой по вертикали равен количеству узлов конструкции, по горизонтали — максимальному количеству обобщенных перемещений узла. Каждая строка матрицы содержит автоматически вычисленные номера обобщенных перемещений соответствующего узла.

Все сгенерированные матрицы МТ, МП и МИ участвуют в процессе формирования результирующих зависимостей.

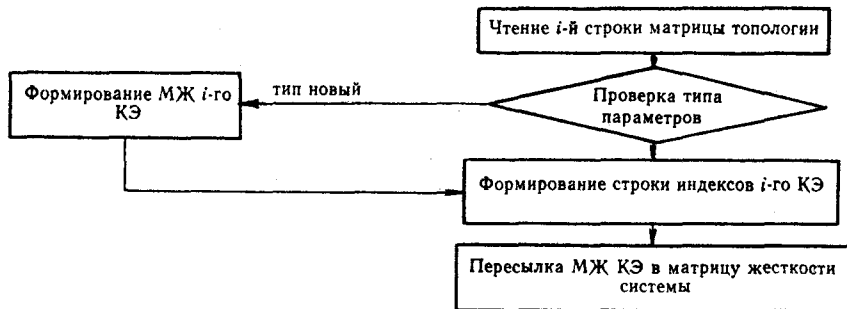
Рассмотрим основные особенности алгоритма формирования МД системы.

После ввода исходной информации и диагностики ошибок вычисляются параметры МД (ширина ленты, порядок системы), формируется МТ и производится расчет порядка и ширины ленты результирующих матриц.

Формирование матрицы жесткости (МЖ) системы осуществляется последовательно для всех узлов дискретной модели конструкции, начиная с 1-го. Компактность МТ позволяет без особых затрат времени выбрать из нее строку, содержащую анализируемый узел. Номер строки МТ соответствует номеру КЭ. Если для очередного КЭ тип параметров совпадает с типом предыдущего КЭ, формирование МЖ КЭ не происходит. После анализа всей МТ сформированные строки МЖ системы, соответствующие i -му узлу, записываются на носитель информации, а индекс i увеличивается на 1. Формирование заканчивается анализом последнего узла модели.

Диагональная МЖ системы формируются несколько иначе. Поскольку она целиком помещается в оперативную память (хранится в виде вектора), экономичнее формирование осуществлять не по узлам, как при формировании МЖ, а по элементам. Соответствующие блок-схемы формирования МЖ приведены на рис. 1.4.

Блок-схема формирования результирующей МЖ системы «по элементам»



Блок-схема формирования результирующей МЖ системы по узлам

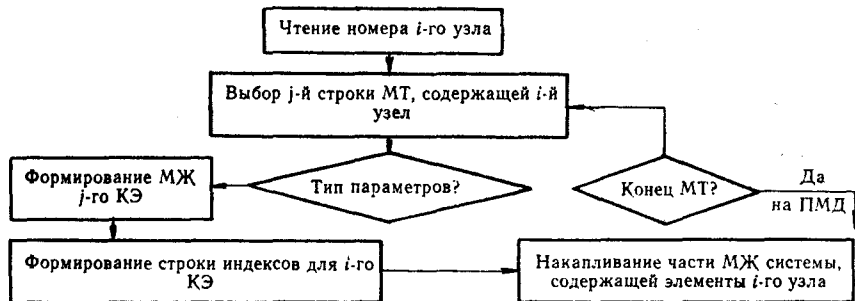


Рис. 1.4. Формирование результирующей матрицы.

Формирование диагональной МЖ осуществляется последовательно для всех КЭ, начиная с первого. Результаты формирования накапливаются в оперативной памяти и после окончания процедуры формирования пересылаются на магнитный диск.