

Глава вторая

РАСЧЕТ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ КАК ЕДИНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

§ 10. О РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ И РАЦИОНАЛЬНОМ ТИПЕ СЕЙСМОСТОЙКОГО КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ

В качестве расчетной схемы каркасного здания принят пространственный каркас, понимаемый в широком смысле слова: элементами его являются не только рамы, но и пластинчатые системы типа

перекрытий и вертикальных диафрагм жесткости (рис. II.18). Жесткость на кручение этих элементов мала и в расчетной схеме ею можно пренебречь.

Разумеется, данная рекомендация не распространяется на тот случай, когда вертикальные элементы жесткости запроектированы в виде пространственной складчатой (в плане) системы или ядра жесткости. Здесь вопросы учета кручения приобретают первостепенное значение.

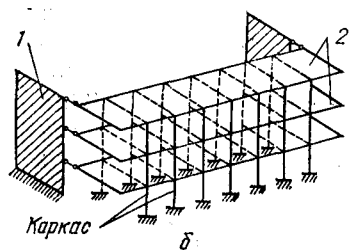
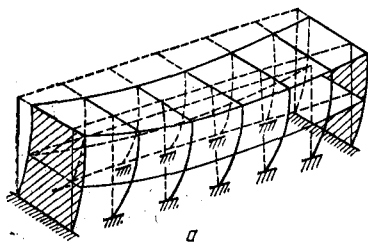


Рис. II.18. Деформированное состояние здания (а) и его пространственная расчетная схема (б):

1 — вертикальная диафрагма жесткости; 2 — перекрытия.

Указанные выше пластинчатые системы типа перекрытий и вертикальных диафрагм жесткости с точки зрения соотношения главных размеров являются балками-стенками и в принципе должны рассчитываться методами теории упругости. Однако расчеты показали, что при определении (формировании) сейсмической нагрузки на здание, рассматриваемое как единая пространственная система, достаточная точность обеспечивается, если перемещения пластинчатых систем в своей плоскости определять по элементарной теории изгиба балок с учетом (и даже без учета) сдвиговых деформаций. Сборность таких систем учитывается с помощью приведенных жесткостных параметров (табл. 9 приложений).

В расчетной схеме каркасного здания массы можно полностью концентрировать в уровнях перекрытий, считая все вертикальные элементы безинерционными. Такие допущения не приводят к заметным погрешностям даже для зданий малой этажности. Для зданий повышенной этажности несущественным является различие в распределении масс по высоте. Если число этажей здания более шести, то поэтажные массы в расчетной схеме можно принимать одинаковыми (усредненными).

Одним из основных факторов, вытекающих из современной спектральной теории сейсмостойкости, является уменьшение коэффициента динамичности, а следовательно, и сейсмических сил за счет снижения боковой жесткости сооружения. В связи с этим до недавнего времени в мировой практике преобладала тенденция строить здания по так называемой гибкой схеме, где основными несущими элементами были сравнительно гибкие железобетонные рамы.

Анализ последствий разрушительных землетрясений, происшедших за последние 15—20 лет в Северной и Южной Америке, Японии, Новой Зеландии и других местах, показал, что в зданиях такой кон-

струкции наблюдались большие взаимные перемещения перекрытий по этажам и вследствие этого повреждались в первую очередь так называемые нерасчетные элементы. При землетрясении в 1957 г. в Мехико многие каркасные здания рамной конструктивной схемы имели значительные повреждения, а несколько таких зданий разрушилось.

Сравнение зданий указанной конструкции со зданиями рамно-связевой системы показало, что в первых трудно обеспечить безопасность жизни людей и сохранность оборудования. В связи с этим еще на Второй международной конференции по сейсмостойкому строительству в 1960 г. в Токио большое внимание уделялось зданиям рамно-связевой системы. Они оценивались как наиболее сейсмостойкие.

Вертикальные диафрагмы жесткости (их иногда называют антисейсмическими), расположенные на достаточно больших расстояниях за счет податливости перекрытий в своей плоскости сравнительно мало повышают динамический коэффициент, а следовательно, и сейсмические силы, но существенно увеличивают несущую способность здания в целом. Не менее важным является то обстоятельство, что они ограничивают деформации и кручение здания, а поэтому при землетрясениях повреждения второстепенных (нерасчетных) элементов уменьшаются. Опыт последних разрушительных землетрясений подтвердил первые теоретические выводы [5], что вертикальные диафрагмы принимают на себя основной удар, поглощают значительную часть энергии, предохраняют каркас здания от обрушения.

Таким образом, в настоящее время можно считать установленным, что каркасные здания, усиленные диафрагмами жесткости, являются рациональным типом сейсмостойких сооружений. При проектировании их особое внимание должно быть уделено правильному выбору соотношений жесткостей рам, вертикальных диафрагм и перекрытий.

Очевидно, что рационально проектировать каркасные здания рамно-связевой системы, сочетающие в себе элементы существенно разной горизонтальной жесткости (рамы и диафрагмы), можно лишь на основе пространственной расчетной схемы и динамического метода расчета. Проектирование по плоской расчетной схеме приводит к ошибочному выводу о необходимости исключения вертикальных диафрагм из работы здания. Этот вывод, к сожалению, отражен в практических рекомендациях ряда нормативных документов и, в частности, руководства по проектированию производственных зданий [24].

§ 11. ПЛОСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ РАСЧЛЕНЕННОГО ЗДАНИЯ

Как видно из предыдущей главы, задача определения сейсмических сил является довольно сложной. Для многоэтажных каркасных зданий трудности расчета значительно возрастают и становятся

практически неопределимыми, если, конечно, не прибегать к помощи ЭВМ.

В настоящее время расчеты на сейсмостойкость с помощью электронно-вычислительных машин выполняются для уникальных сооружений. В проектной практике важно иметь практический метод расчета, позволяющий сравнительно просто произвести расчеты таких массовых сооружений, какими являются каркасные здания.

Значительное упрощение в расчетах можно получить за счет расчленения сложной пространственной конструкции на плоские системы с удерживающими и толкающими связями. Эти системы,

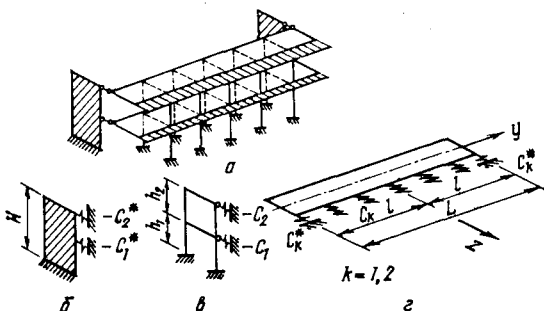


Рис. 11.19. Расчетные схемы здания (а), поперечных стен (вертикальных диафрагм жесткости) (б), поперечных рам (в), перекрытий (горизонтальных диафрагм жесткости) (г).

имеющие в местах расчленения удерживающие и соответственно толкающие связи, при сборке или «склеивании» в пространственную систему полностью отвечают пространственной работе сооружения.

Идея расчленения здания на плоские элементы положена в основу практического метода расчета на сейсмические воздействия.

Каркасное здание будем «склеивать» из плоских элементов на толкающих и поддерживающих опорах (рис. 11.19, 11.20). Поддерживающие упругие опоры перекрытий моделируют поперечные рамы и вертикальные диафрагмы жесткости, а толкающие упругие опоры вертикальных элементов — толкающее действие перекрытий.

На доказательстве возможности «склеивания» здания из таких элементов останавливаться не будем, так как оно ничем, по существу, не отличается от доказательства для зданий с несущими стенами, приведенного в § 2. Отметим лишь то, что в каркасных зданиях рамно-связевой системы условия «склеивания» полностью не выполняются, так как подобие форм изгиба вертикальных диафрагм и поперечных рам на толкающих опорах удовлетворяется лишь приближенно, что, однако, мало отражается на окончательных результатах.

Согласно принципу Рэлея, частоты собственных колебаний нечувствительны к изменениям форм, если они не резко отличаются от истинных. Для случая абсолютно жестких перекрытий, когда про-

странственная работа проявляется за счет поворота здания, погрешности в частотах малы, хотя несоответствие в формах рам довольно значительно. Для зданий с деформируемыми в своей плоскости перекрытиями связь между диафрагмами и рамами ослабляется и вследствие этого погрешности в частотах из-за отсутствия подобия форм вертикальных элементов уменьшаются.

Плоские перекрытия опираются на упругие опоры, которые моделируют работу рам и диафрагм жёсткости. Рам в каркасе здания обычно бывает много (больше пяти) и поэтому без сколько-ни-

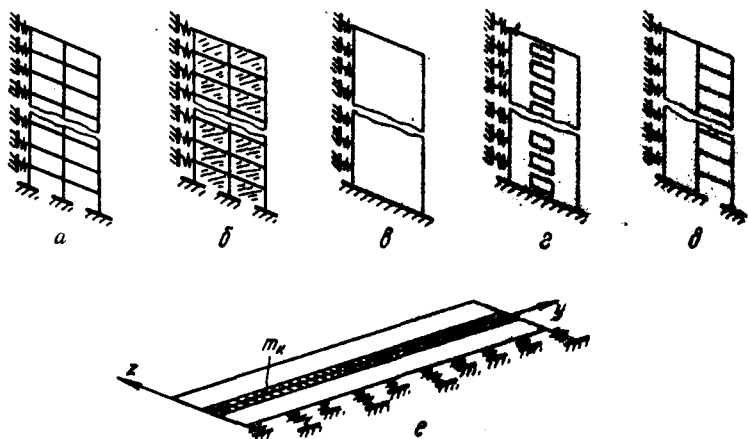


Рис. 11.20. Плоские элементы расчлененного многоэтажного здания:
 а — поперечная рама; б — рама с заполнением; в — сплошная диафрагма;
 г — диафрагма с проемами; д — рамо-диафрагма; е — перекрытие.

будь ощутимых погрешностей для расчета обобщенные жёсткости $C_k^{(i)}$ упругих опор, моделирующих рамы, можно равномерно распределить по длине здания.

Таким образом, мы приходим к расчетной схеме балки на упругом основании с жёсткостью $\frac{C_k^{(i)}}{a}$, опирающейся по концам на опоры с жёсткостью $C_k^{*(i)}$ (рис. 11. 19). Жёсткость поддерживающих упругих опор $C_k^{*(i)}$ равна обобщенной жёсткости вертикальных диафрагм. Для этой и других расчетных схем частотные уравнения совпадают с частотными уравнениями для балок без упругого основания (см. § 6), так как последнее не влияет ни на собственные числа λ , ни на формы собственных колебаний. Упругое основание учитывается в расчете лишь на последнем этапе — оно дает сдвигу спектра собственных частот. Это обстоятельство в значительной степени упрощает расчеты, так как позволяет использовать в готовом виде частотные уравнения зданий с несущими стенами.

Если перекрытия здания неодинаковы или несут различные массы, то необходимо выполнить условия равночастотности перекры-

тий:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \dots = \lambda_n = \lambda = l \sqrt{\frac{m_1 \omega^2 - \frac{C_1^{(i)}}{a}}{[E_1 I_1]}}; \quad (11.1)$$

$$\frac{C_1^{*(i)}}{[E_1 I_1]} = \frac{C_2^{*(i)}}{[E_2 J_2]} = \dots = \frac{C_k^{*(i)}}{[E_k I_k]} = \dots = \frac{C_n^{*(i)}}{[E_n I_n]}; \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(\frac{\lambda^4}{l^4} [E_1 I_1] + \frac{C_1^{(i)} \zeta_1}{a} \right) \frac{1}{m_1} = \left(\frac{\lambda^4}{l^4} [E_2 J_2] + \frac{C_1^{(i)} \zeta_2}{a} \right) \frac{1}{m_2} = \dots \\ &\dots = \left(\frac{\lambda^4}{l^4} [E_n I_n] + \frac{C_n^{(i)} \zeta_n}{a} \right) \frac{1}{m_n}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $[EI]$ — приведенные изгибные жёсткости перекрытий (см. § 30 раздела I); a — шаг рам; $C^{*(i)}$, $C^{(i)}$ — обобщенные жёсткости вертикальных диафрагм и поперечных рам; m_k — погонные массы перекрытий; l — половина длины здания.

Из уравнения (11.3) найдем:

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \rho_2 + \gamma_2 \frac{1}{C_1^{(i)}}; \\ &\dots \dots \dots \\ \zeta_k &= \rho_k + \gamma_k \frac{1}{C_1^{(i)}}; \\ &\dots \dots \dots \\ \zeta_n &= \rho_n + \gamma_n \frac{1}{C_1^{(i)}}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

где

$$\rho_k = \frac{m_k}{m_1}; \quad \gamma_k = \frac{\lambda^4 a}{l^4} (\rho_k [E_1 I_1] - [E_k I_k]).$$

Если помимо изгиба учитываются деформации сдвига перекрытий, то условия равночастотности будут [16]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1} \left(\frac{\lambda_j^4}{L^4} \cdot \frac{E'I}{1+\nu_j} + \zeta_1 \frac{C_1^{(i)}}{a} \right) &= \frac{1}{m_2} \left(\frac{\lambda_j^4}{L^4} \cdot \frac{E'I}{1+\nu_j} + \zeta_2 \cdot \frac{C_1^{(i)}}{a} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{m_n} \left(\frac{\lambda_j^4}{L^4} \cdot \frac{E'I}{1+\nu_j} + \zeta_n \cdot \frac{C_1^{(i)}}{a} \right) = \omega^2, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $\nu_j = \frac{\lambda_j^4}{\bar{\lambda}_j^2} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{E'I}{G'F}$; λ_j , $\bar{\lambda}_j$ — корни характеристических уравнений чисто изгибных и сдвиговых колебаний ($\lambda_1 = 4,73$; $\lambda_2 = 7,853$; $\lambda_3 = 10,996$; $\bar{\lambda}_1 = 6,283$; $\bar{\lambda}_2 = 9,425$; $\bar{\lambda}_3 = 12,566$); E' , G' — приведенные жесткостные характеристики перекрытий, определяемые по

табл. 9 приложений; I, F — момент инерции и площадь поперечного сечения перекрытия; L — длина здания; $\zeta_1 = 1$; $\zeta_2 = \frac{m_2}{m_1} + \gamma_2 \frac{1}{C_1^{(1)}}$; ... $\gamma_2 = \frac{\lambda_j^4}{L^3 t_2} \frac{E'I}{1 + \nu_j} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right)$; ... $\gamma_n = \frac{\lambda_j^4}{L^3 t_2} \frac{E'I}{1 + \nu_j} \times \left(\frac{m_n}{m_1} - 1 \right)$; t_2 — число поперечных рам.

Из условий (11.5) определяется закон изменения по высоте жесткостей поддерживающих опор выделенных из здания перекрытий:

$$C_k^{(l)} = \frac{m_k}{m_1} C_1^{(l)} + \gamma_k, \quad (11.6)$$

где γ_k — дополнительные жесткости, выравнивающие частоты перекрытий.

В работах [16, 26] показано, что учет деформаций сдвига в коротких зданиях имеет существенное значение.

Рассмотрим квазистатическую задачу об изгибе рамы каркаса здания от специфического (толкающего) воздействия — реакций, передаваемых нагруженными перекрытиями. Эти реакции рассматриваются как одна групповая сила, характеризуемая одним параметром — обобщенной жесткостью. Последняя, равная жесткостям толкающих упругих опор поперечной рамы, определяется из уравнения:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{C_1} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{\zeta_2 C_1} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} - \frac{1}{\zeta_n C_1} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.7)$$

Подставляя в (11.7) значения коэффициентов $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ из условий (11.4) или (11.6), получим:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{C_1} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{\gamma_2 + \rho_2 C_1} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} - \frac{1}{\gamma_n + \rho_n C_1} \end{vmatrix} = 0, \quad (11.8)$$

где δ_{kr} — единичные перемещения поперечных рам, определяемые по формулам табл. 5 приложений.

Упругие опоры, жесткости которых имеют структуру $\gamma_k + \rho_k C_1$, назовем обобщенными толкающими опорами. Добавка к «обычным» толкающим опорам в виде γ_k вызвана, как было указано выше, необходимостью выравнять частоты колебаний, выделенных из

здания перекрытий. В зависимости от величины приведенных изгибных жёсткостей перекрытий и величин масс, сконцентрированных в их уровнях, эти добавки могут быть как положительными, так и отрицательными.

Хотя уравнение (11.8) получено из уравнения (11.7), между ними имеется важное принципиальное отличие, выражающееся прежде всего в условиях ортогональности форм изгиба поперечных рам:

$$X_i(x_1) X_j(x_1) + \zeta_2 X_i(x_2) X_j(x_2) + \dots + \zeta_n X_i(x_n) X_j(x_n) = 0; \quad (11.9)$$

$$X_i(x_1) X_j(x_1) + \rho_2 X_i(x_2) X_j(x_2) + \dots + \rho_n X_i(x_n) X_j(x_n) = 0. \quad (11.10)$$

Условие ортогональности (11.10) относится к случаю «обычных», а условие (11.9) — к случаю обобщенных толкающих опор.

В математическом отношении уравнение (11.7) аналогично частотному уравнению собственных колебаний поперечной рамы с сосредоточенными массами и с упругими опорами, имеющими жёсткость γ :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{M_1 \omega^2} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{M_2 \omega^2 - \gamma_2} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} - \frac{1}{M_n \omega^2 - \gamma_n} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.11)$$

Отличия от (11.11) в уравнении (11.8) γ_k могут быть как положительными, так и отрицательными, что связано со спецификой рассматриваемой задачи. Более того, возможны случаи, когда второе слагаемое обобщённой жёсткости становится отрицательным (поддерживающая опора), а первое — положительным (толкающая опора). Тогда собственными числами задачи становятся жёсткости поддерживающих опор; слагаемые γ_k выполняют роль масс.

Указанная математическая аналогия между уравнениями (11.8) и (11.11) позволяет использовать решения задач динамики сооружений [25, 32].

Для рам с числом этажей более трех решение определителя (11.8) без использования вычислительной техники становится затруднительным. В этом случае удобно применять следующий приближенный метод.

Поперечная рама загружается в уровне перекрытий сосредоточенными силами (безразмерными):

$$\begin{aligned} P_1 &= \gamma_1 + \rho_1 \cdot 10^\alpha; \\ P_2 &= \gamma_2 + \rho_2 \cdot 10^\alpha; \\ &\dots \dots \dots \\ P_n &= \gamma_n + \rho_n \cdot 10^\alpha; \end{aligned} \quad (11.12)$$

где 10^α — множитель, выравнивающий порядок слагаемых.

По формуле $\delta = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \delta_{n3}P_3 + \dots + \delta_{nn}P_n$ определяется перемещение рамы в уровне верхнего ригеля.

Обобщенные жесткости поперечных рам в первом приближении вычисляются по формулам: $C_1^{(i)} = \frac{6\bar{C}_1^{(i)} \cdot 10^\alpha}{\delta}$ (для трехэтажного здания); $C_1^{(i)} = \frac{10\bar{C}_1^{(i)} \cdot 10^\alpha}{\delta}$ (для четырехэтажного здания); $C_1^{(i)} = \frac{15\bar{C}_1^{(i)} \cdot 10^\alpha}{\delta}$ (для пятиэтажного здания).

Безразмерный параметр $\bar{C}_1^{(i)}$ принимается по табл. II.1. Для многоэтажных зданий $C_1^{(i)}$ в первом приближении вычисляется по формуле (11.15).

Ординаты форм изгиба рамы:

$$\begin{aligned} X_i(x_1) &= \frac{\delta_{1n}}{1 - C_1^{(i)}(\delta_{11} - \delta_{1n})}; \\ X_i(x_2) &= \frac{\delta_{2n} + C_1^{(i)}(\delta_{1n} - \delta_{2n})X_i(x_1)}{1 - [\gamma_2 + \rho_2 C_1^{(i)}](\delta_{22} - \delta_{2n})}; \\ &\dots \\ X_i(x_k) &= \frac{\delta_{kn} + \sum_{r=1}^{k-1} [\gamma_r + \rho_r C_1^{(i)}](\delta_{rn} - \delta_{kn})X_i(x_r)}{1 - [\gamma_k + \rho_k C_1^{(i)}](\delta_{kk} - \delta_{kn})}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Значения $C_1^{(i)}$ и ординаты форм изгиба могут быть уточнены последовательными приближениями.

Уточненное значение $C_1^{(i)}$:

$$C_1^{(i)} = \frac{X(x_1) - \delta_{1n}[\gamma_2 X(x_2) + \gamma_3 X(x_3) + \dots + \gamma_n X(x_n)]}{\delta_{11}X(x_1) + \delta_{1n}[\rho_2 X(x_2) + \rho_3 X(x_3) + \dots + \rho_n X(x_n)]}. \quad (11.14)$$

Описанный выше общий алгоритм определения обобщенной жесткости $C^{(i)}$ поперечных рам в ряде случаев может быть упрощен. Так, для рам с различными соотношениями погонных жесткостей стоек и ригелей по высоте в работах [25, 32] имеются готовые таблицы для определения частот собственных колебаний, с помощью которых обобщенные жесткости поперечных рам определяются как произведение поэтажных сосредоточенных масс (любых по величине, но с заданным соотношением по высоте) на квадрат соответствующей i -й частоты поперечной рамы.

Обобщенные жесткости (жесткости толкающих опор) поперечных рам с постоянными по высоте погонными жесткостями стоек, ригелей и одинаковыми поэтажными массами определяются как

$$C^{(i)} = \bar{C}^{(i)}b, \quad (11.15)$$

где $b = \frac{12s}{h^2}$ — для рам, у которых $\frac{i_p}{i_c} \geq 2,5$; $b = \frac{12}{h^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r} \right)}$ —

для рам, у которых $\frac{l_p}{i_c} < 2,5$; $\bar{C}^{(i)}$ — коэффициент, определяемый по табл. 6 приложений в зависимости от количества этажей n и от номера тона i собственных колебаний поперечных рам (в инженерных расчетах достаточно учесть первые три тона собственных колебаний вертикальных элементов здания, т. е. $i = 1, 2, 3$); i_c, i_p — средние значения погонных жесткостей стоек и ригелей поперечных рам; s, r — суммарная (осредненная) погонная жесткость стоек и ригелей поперечных рам; h — расчетная высота этажа (осредненная).

Ординаты трех форм колебаний рам приведены в табл. 1—3 приложений. Постоянные множители, с точностью до которых определяются формы собственных колебаний, подобраны таким образом, чтобы ординаты форм одновременно были коэффициентами $\eta_i(x_k)$, входящими в формулу для определения сейсмических нагрузок.

Формулой (11.15) и табл. 1—3, 6 приложений можно пользоваться и для многоэтажных зданий ($n > 6$), если массы верхнего и первого этажей отличаются от масс остальных этажей не более чем на 20—30%.

Обобщенная жесткость вертикальных диафрагм, представляющих собой раму с заполнением:

$$C^{*(i)} = \bar{C}^{(i)} b, \quad (11.16)$$

где $\bar{C}^{(i)}$ — безразмерные коэффициенты жесткости, определяемые по табл. 6 приложений; $b = \frac{12s + f}{h^2}$; f — величина, характеризующая общую (начальную) жесткость заполнения яруса, определяется по табл. 5 приложений;

Ординаты форм изгиба определяются по табл. 1—3 приложений. Во время землетрясений жесткость рам с заполнениями изменяется. В работе [29] приведены экспериментальные данные о пределах изменения величины f , что целесообразно учитывать в многовариантных (с разными жесткостями) расчетах зданий как единых пространственных систем.

Обобщенные жесткости вертикальных диафрагм других конструктивных схем определяются по формулам, приведенным в § 5 и 15.

§ 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМНО-СВЯЗЕВЫХ КАРКАСОВ С НЕБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДИАФРАГМ

А. Здание с двумя вертикальными диафрагмами жесткости по торцам (см. рис. II.19). Определение частот и форм собственных колебаний каркасных зданий даже с небольшим числом вертикальных диафрагм жесткости сложная задача, решаемая в общем случае только с помощью ЭВМ. Однако вычисления показали, что при переходе к осредненным (по высоте) жесткостным характеристикам диафрагм жесткости и поперечных рам расчет упрощается настолько, что за-

дача может решаться и с помощью средств так называемой малой механизации. Можно также не учитывать и различие в массах, концентрируемых в уровнях перекрытий. Тогда отпадает необходимость в использовании в качестве промежуточного этапа условий равночастотности выделенных из здания перекрытий на поддерживающих опорах, моделирующих работу диафрагм жесткости и поперечных рам (см. рис. II.19). С учетом сделанных допущений частотные уравнения симметричных и кососимметричных в плане колебаний приобретут следующий вид:

$$\frac{[EI]}{l^3} \Phi(\lambda) = C^{*(i)} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (12.1)$$

$$\frac{[EI]}{l^3} \frac{B(\lambda)}{S_1(\lambda)} = C^{*(i)}, \quad (12.2)$$

где $\Phi(\lambda) = \lambda^3 \frac{\text{ch } \lambda \sin \lambda + \text{ch } \lambda \cos \lambda}{2 \text{ch } \lambda \cos \lambda}$ — протабулированная функция [5]; $B(\lambda) = \text{ch } \lambda \sin \lambda - \text{ch } \lambda \cos \lambda$; $S_1(\lambda) = 2 \text{sh } \lambda \sin \lambda$ — протабулированные в работе [1] функции; $C^{*(i)}$ — обобщенная жесткость торцовых диафрагм, определяемая по формулам, приведенным в § 5 и 15 (в зависимости от их конструктивных особенностей); $[EI]$ — приведенная изгибная жесткость перекрытий (см. § 30 раздела I); l — половина длины здания.

Частота колебаний здания как единой пространственной системы:

$$\omega_i = \sqrt{\left[\frac{\lambda_{ij}^4}{l^4} [EI] + \bar{C}^{(i)} \frac{12t_2}{Lh^2} \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{r}} \right] \frac{1}{m}}, \quad (12.3)$$

где λ_{ij} — корни частотных уравнений (12.1) и (12.2); \bar{C}_i — безразмерный параметр, принимаемый по табл. 6 приложений; t_2 — число поперечных рам; s, r — осредненные величины суммарных погонных изгибных жесткостей стоек и ригелей одного этажа; h — осредненная высота этажа; m — осредненная погонная масса перекрытия; L — длина здания.

Ординаты форм симметричных и кососимметричных колебаний (в плане) определяются по формулам (6.5) и (6.6), а в поперечном сечении здания — по табл. 1—3 приложений.

При расчете зданий малой этажности ($n < 6$) указанные выше допущения приводят в ряде случаев к заметным погрешностям, и поэтому его следует уточнить. Методика уточненного расчета иллюстрируется в приводимых в конце параграфа примерах расчета.

Б. Здание с тремя вертикальными диафрагмами жесткости (рис. II.21). Частотное уравнение симметричных в плане колебаний для здания с двумя диафрагмами жесткости по торцам и одной в середине:

$$\frac{l^3}{2\lambda^3 [EI]} \cdot \frac{l^3 C_I^{*(i)}}{[EI] \lambda^3} \frac{B(\lambda) + E(\lambda)}{l^3 C_I^{*(i)}} + \frac{1}{C_{II}^{*(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12.4)$$

где $E(\lambda) = \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + 1$, $C(\lambda) = 2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda$, $A(\lambda) = \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda$ — протабулированные в работе [1] функции; $C_I^{*(i)}$, $C_{II}^{*(i)}$ — обобщенные жесткости торцовых и средней диафрагм.

Поскольку кручение вертикальных диафрагм не учитывается, частотное уравнение кососимметричных в плане колебаний совпадает с уравнением (12.2) для здания с двумя диафрагмами по торцам.

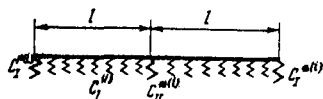


Рис. II.21. Расчетная схема перекрытия для здания с тремя диафрагмами жесткости.

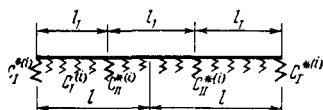


Рис. II.22. Расчетная схема перекрытия для здания с четырьмя диафрагмами жесткости.

Частотный параметр λ определяется способом попыток, а частоты ω_{ij} — по формуле (12.3).

Ординаты форм симметричных и кососимметричных колебаний в плане определяются по формулам (6.5) и (6.6), а в поперечном сечении — по табл. 1—3 приложений.

В. Здание с четырьмя вертикальными диафрагмами жесткости, расположенными на одинаковых расстояниях l_1 (рис. II.22). Частотное уравнение симметричных колебаний:

$$\frac{l^3}{\lambda^3 [EI] S(\lambda)} \left\{ K(\lambda) \left[E(\lambda) + \frac{l^3 C_I^{*(i)}}{\lambda^3 [EI]} B(\lambda) \right] - U(\lambda - ul_1) + S(\lambda) V(\lambda - ul_1) \right\} + \frac{1}{C_{II}^{*(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12.5)$$

$$\text{где } K(\lambda) = \frac{S(\lambda) S(\lambda - ul_1) - U(\lambda) U(\lambda - ul_1)}{\frac{l^3 C_I^{*(i)}}{\lambda^3 [EI]} C(\lambda) - A(\lambda)};$$

$S(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda)$, $U(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)$, $V(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda)$ — протабулированные в работе [1] функции; $C_I^{*(i)}$, $C_{II}^{*(i)}$ — обобщенные жесткости торцовых и средних диафрагм (см. рис. II.22); $u = \frac{\lambda}{l}$; $l_1 = \frac{L}{3}$; L — длина здания.

Ординаты форм собственных колебаний здания вычисляются по формуле

$$V_{ij}(x_k, y) = X_i(x_k) \left\{ S(uy) \left[\frac{l^3 C_I^{*(i)}}{\lambda^3 [EI]} U(\lambda) - V(\lambda) - \frac{U(\lambda - ul_1)}{2K(\lambda)} \right] \frac{T(uy)}{S(\lambda)} - \frac{l^3 C_I^{*(i)}}{\lambda^3 [EI]} V(uy) + \frac{1}{2K(\lambda)} V(uy - ul_1) \right\}, \quad (12.6)$$

где $T(uy) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} uy + \sin uy)$ — протабулированная в работе [1]

функция; $X_i(x_k)$ — ординаты форм колебания здания в поперечном сечении, принимаемые по табл. 1—3 приложений.

Пример 1. Определить первую частоту и соответствующую ей форму собственных колебаний двухэтажного каркасного здания (рис. II.23). Основной несущей конструкцией здания является сбор-

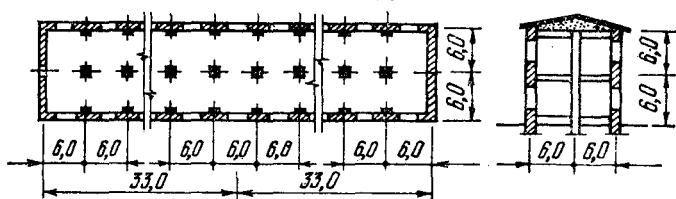


Рис. II.23. План и разрез двухэтажного каркасного здания с кирпичным заполнением.

ный железобетонный каркас, выполняемый из бетона марки 200. Длина здания $L = 2l = 66$ м. Сечения элементов каркаса: 1-й этаж — колонны 50×60 см, ригели — 35×80 см; 2-й этаж — колонны 50×50 см; ригели — 35×70 см. Перекрытия — сборные железобетонные из ребристых панелей, соединенных обвязкой по периметру здания и опирающихся на ригели поперечных рам. Стеновое заполнение толщиной 51 см выполнено из дырчатого кирпича марки 75 на растворе М-50. Диафрагмы жесткости представляют собой железобетонные рамы с кирпичным заполнением. Кровля совмещенная.

Упругие характеристики материалов: бетона — $E_6 = 2,9 \times 10^5$ кг/см²; кладки (модуль сдвига) — $G_{кл} = 6 \cdot 10^3$ кг/см². Моменты инерции поперечных сечений перекрытий вычислены для сборных перекрытий с об-

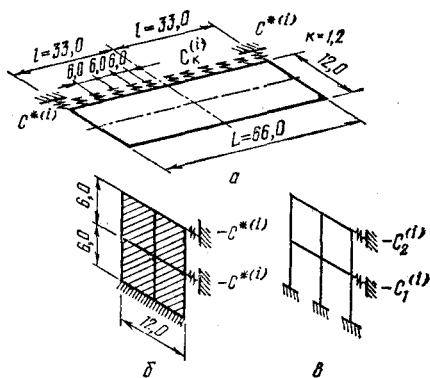


Рис. II.24. Расчетные схемы плоских элементов расчлененного здания: а — перекрытий; б — вертикальных диафрагм жесткости; в — поперечных рам.

вязкой: $I_1 = I_2 = 1265 \cdot 10^6$ см⁴. Величина приведенного модуля упругости для сборных перекрытий равна $E = 0,907 \cdot 10^5$ кг/см². Погонные массы, приведенные к уровням перекрытий первого и второго этажей:

$$m_1 = 0,246 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}; \quad m_2 = 0,155 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}.$$

Расчетные схемы плоских элементов расчлененного здания показаны на рис. II.24.

Коэффициенты жесткости толкающих упругих опор вертикальных диафрагм, учитывая равенство моментов инерции перекрытий пер-

первого и второго этажей, определяемые из уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}^* C^{*(1)} - 1 & \delta_{12}^* C^{*(1)} \\ \delta_{21}^* C^{*(1)} & \delta_{22}^* C^{*(1)} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (12.7)$$

где $\delta_{11}^* = \delta_{12}^* = \delta_{21}^*$ и δ_{22}^* — единичные перемещения вертикальных диафрагм, определяемые по формулам табл. 5 приложений как для рамы с заполнением

$$\delta_{11}^* = \delta_{12}^* = \delta_{21}^* = \frac{h_1^2}{12s_1 + f_1} = \frac{600^2}{12 \cdot 130,5 \cdot 10^7 + 12 \cdot 320 \cdot 10^7} = 0,260 \cdot 10^{-5} \text{ кг/см};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{11}^* = \frac{h_2^2}{12s_2 + f_2} = 0,260 \cdot 10^{-5} + \frac{600^2}{12 \cdot 75,6 \cdot 10^7 + 11 \cdot 550 \cdot 10^7} = 0,548 \cdot 10^{-5} \text{ см/кг};$$

$h_1 = h_2 = 600$ см — высота первого и второго этажей; s_1 и s_2 — суммарные погонные жесткости стоек рам в уровнях тех же этажей:

$$s_1 = 3 \cdot \frac{E\delta_{1c}}{h_1} = 3 \cdot \frac{2,9 \cdot 10^5 \cdot 90 \cdot 10^4}{600} = 130,5 \cdot 10^7 \text{ кг·см};$$

$$s_2 = 3 \cdot \frac{E\delta_{2c}}{h_1} = 3 \cdot \frac{2,9 \cdot 10^5 \cdot 52 \cdot 10^4}{600} = 75,6 \cdot 10^7 \text{ кг/см};$$

f_1 и f_2 — характеристики жесткостей панелей заполнения рам там же; $h_{\pi} = 5,6$ м — высота панелей заполнения; $F = 17,6 \times 10^3$ см² — площадь поперечного сечения каждой панели заполнения.

Уравнение (12.7), разрешенное относительно обобщенной жесткости $C^{*(1)}$ торцовых диафрагм, с учетом равенства некоторых единичных перемещений, имеет вид:

$$C^{*(1,2)} = \frac{\delta_{11}^* + \delta_{22}^* \pm \sqrt{(\delta_{11}^* + \delta_{22}^*)^2 - 4\delta_{11}^* (\delta_{22}^* - \delta_{11}^*)}}{2\delta_{11}^* (\delta_{22}^* - \delta_{11}^*)}.$$

Наименьшее значение $C^{*(1)}$ равно $14,189 \cdot 10^4$ кг/см.

Параметр λ определим из частотного уравнения перекрытия, выделенного из здания, опирающегося по концам на упругие опоры, моделирующие торцовые диафрагмы:

$$\Phi(\lambda) = C^{*(1)} \cdot \frac{l^3}{|EI|} = 14,189 \cdot 10^4 \cdot \frac{3300^3}{0,907 \cdot 10^5 \cdot 1265 \cdot 10^6} = 44,454. \quad (12.8)$$

По таблице работы [5] для функций $\Phi(\lambda)$ находим корень уравнения (12.8) $\lambda_{11} = 1,530$.

Определим обобщенную жесткость $C_1^{(1)}$ поперечных рам. Жесткос-

ти в уровнях второго и первого этажей связаны соотношением:

$$C_2^{(i)} = \zeta_2 C_1^{(i)}, \quad (12.9)$$

где $\zeta_2 = \frac{\gamma_2}{C_1^{(i)}} + \rho_2$; $\gamma_2 = \frac{\lambda^4 a [EI]}{l^4} (\rho_2 - 1)$; $\rho_2 = \frac{m_2}{m_1}$; a — шаг рам.

Параметр ζ_2 определяется из условий равночастотности выделенных из здания перекрытий первого и второго этажей:

$$\rho_2 = \frac{0,155}{0,246} = 0,630;$$

$$\gamma_2 = \frac{1,53^4 \cdot 600 \cdot 0,907 \cdot 10^8 \cdot 1265 \cdot 10^8}{3300^4} (0,630 - 1) = -0,117 \cdot 10^4 \text{ кг/см};$$

$$\zeta_2 = \frac{0,117 \cdot 10^4}{C_1^{(i)}} + 0,630.$$

Обобщенная жесткость $C_1^{(i)}$ должна удовлетворять условиям квазистатического равновесия, выделенных из здания поперечных рам:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{C_1^{(i)}} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{\zeta_2 C_1^{(i)}} \end{vmatrix} = 0, \quad (12.10)$$

где $\delta_{11} = 0,278 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}$; $\delta_{12} = \delta_{21} = 0,326 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}$; $\delta_{22} = 0,898 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}$ — единичные перемещения поперечной рамы, определяемые по формулам табл. 5 приложений.

Уравнение (12.10), разрешенное относительно $C_1^{(i)}$, имеет вид:

$$C_1^{(1,2)} = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}, \quad (12.11)$$

где $B_1 = \rho_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)$;

$$B_2 = \gamma_2 \frac{B_1}{\rho_2} - \delta_{11} - \rho_2 \delta_{22}; \quad B_3 = 1 - \gamma_2 \delta_{22}.$$

Значение $C_1^{(1)}$, подсчитанное по формуле (12.11), равно $1,533 \times 10^4 \text{ кг/см}$.

Первая частота собственных колебаний здания ($i = 1$; $j = 1$):

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{1}{m_1} \left\{ \frac{\lambda_{11}^4}{l^4} [EI] + \frac{t_2 C_1^{(1)}}{L} \right\}} = 11,2 \text{ 1/сек},$$

где t_2 — число поперечных рам.

Определим формы собственных колебаний диафрагм жесткости, рам каркаса и перекрытий.

D	0	1	2	3	4
$V_1(y_p)$	1	2,726	4,505	6,097	7,565
$\frac{X_1(x_2)}{X_1(x_1)} V_1(y_p)$	2,079	5,667	9,366	12,676	15,728

а) Вертикальные диафрагмы жесткости:

$$X_1^*(x_1) = \frac{\delta_{12}^*}{1 + C^{*(1)}(\delta_{12}^* - \delta_{11}^*)} = 0,026 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг};$$

$$X_1^*(x_2) = \delta_{22} + C^{*(1)} X_1^*(x_1) (\delta_{12}^* - \delta_{22}^*) = 0,0442 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}.$$

Соотношение между ординатами формы

$$\frac{X_1^*(x_2)}{X_1^*(x_1)} = 1,700.$$

б) Рамы каркаса:

$$X_1(x_1) = \frac{\delta_{11}}{1 + C_1^{(1)}(\delta_{12} - \delta_{11})} = 0,304 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг};$$

$$X_1(x_2) = \delta_{22} + C_1^{(1)} X_1(x_1) (\delta_{12} - \delta_{22}) = 0,632 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}.$$

Соотношение между ординатами формы

$$\frac{X_1(x_2)}{X_1(x_1)} = 2,079.$$

в) Перекрытия первого и второго этажей:

$$V_1(y) = V_1(0) [N_1(uy) + N_2(uy)];$$

$$N_1(uy) = \mathcal{S}(uy) - \frac{\bar{C}^{*(1)}}{\lambda^3} V(uy);$$

$$N_2(uy) = \left[\frac{\bar{C}^{*(1)}}{\lambda^3} U(\lambda) - V(\lambda) \right] \cdot \frac{T(uy)}{S(\lambda)};$$

$$V_2(y) = V_1(y) \frac{X_1(x_2)}{X_1(x_1)} = 2,079 V_1(y), \quad (12.12)$$

где $u = \frac{\lambda}{l} = 0,464 \cdot 10^{-3}$; $C^{*(1)} = 44,454$; $S_\lambda = 1,229$; $U(\lambda) = 1,188$; $V(\lambda) = 0,601$; $S(uy)$; $T(uy)$; $U(uy)$; $V(uy)$ — известные протабулированные гиперβολо-тригонометрические функции [1].

Ординаты $V_1(y_p)$, $V_2(y_p)$, подсчитанные с точностью до постоянного множителя $V_1(0)$ по формулам (12.12) для десяти сечений половины длины перекрытия, приведены в табл. II.12.

Пример 2. Определить первые частоту и форму собственных колебаний 3-этажного каркасного здания, имеющего те же основные не-

5	6	7	8	9	10
8,876	10,061	10,973	11,694	12,054	12,182
18,483	20,917	22,813	24,166	26,245	25,326

сушие конструкции и прочностные характеристики, что и в примере 1. Шаг колонн тот же: $a = 6,0$ м. Длина здания $L = 2l = 48$ м. Сечения элементов рам: стойки первого и второго этажей — 50×60 ; третьего этажа — 50×50 см; ригели первого и второго этажей — 35×80 ; третьего этажа — 35×70 см. Высота всех этажей одинакова $h = 6,0$ м.

Высота здания $H = 18,0$ м. Погонные массы, отнесенные к уровням перекрытий, имеют следующие значения: на первом и втором этажах $m_1 = m_2 = 0,246$ кг · сек²/см²; на третьем — $m_3 = 0,155$ кг · сек²/см².

Вертикальные диафрагмы жесткости представляют собой раму с заполнением из дырчатого кирпича. Определим жесткости толкающих опор диафрагм и рам каркаса.

а) *Диафрагмы жесткости.* Жесткость толкающих опор диафрагм $C^{*(1)}$ зависит от соотношения моментов инерции поперечного сечения перекрытий. $I_1 = I_2 = I_3$, следовательно, $C^{*(1)}$ в уровнях всех перекрытий одинаковы. Для определения $C^{*(1)}$ воспользуемся приближенной формулой

$$C^{*(1)} = \bar{C}^{(1)} b^* = 0,19806 \cdot 36,496 \cdot 10^4 = 7,22 \cdot 10^4 \text{ кг/см},$$

где $\bar{C}^{(1)}$ — коэффициент, определяемый по табл. 6 приложений;

$$b^* = \frac{12s_{\text{ср}} + f_{\text{ср}}}{h^2} = \frac{12 \cdot 112,2 \cdot 10^7 + 11806 \cdot 10^7}{36 \cdot 10^4} = 36,496 \cdot 10^4 \text{ кг/см};$$

$s_{\text{ср}} = 112,2 \cdot 10^7$ кг/см — среднее значение погонных жесткостей стоек рам всех этажей; $f_{\text{ср}} = 11806 \cdot 10^7$ кг/см — усредненная характеристика жесткостей заполнения.

Определить жесткости толкающих упругих опор диафрагм, представляющих собой раму с заполнением, точным способом сложнее, поскольку необходимо решать кубическое уравнение.

Жесткости упругих опор $C^{*(i)}$ в этом случае определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}^* C^{*(i)} - 1 & \delta_{12}^* C_i^{*(i)} & \delta_{13}^* C_i^{*(i)} \\ \delta_{21}^* C^{*(i)} & \delta_{22}^* C^{*(i)} - 1 & \delta_{23}^* C^{*(i)} \\ \delta_{32}^* C^{*(i)} & \delta_{32}^* C^{*(i)} & \delta_{33}^* C^{*(i)} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (12.13)$$

где $\delta_{11}^* = \delta_{12}^* = \delta_{13}^* = 0,259 \cdot 10^{-5} \text{ см/кг}$; $\delta_{22}^* = \delta_{23}^* = 0,553 \cdot 10^{-5} \text{ см/кг}$; $\delta_{33}^* = 0,821 \cdot 10^{-5} \text{ см/кг}$ — единичные перемещения, определяемые по формулам табл. 5 приложений как для рамы с заполнением.

Уравнение (12.13), решенное относительно $C^{*(t)}$, имеет вид:

$$a_1 [C^{*(t)}]^3 + a_2 [C^{*(t)}]^2 + a_3 C^{*(t)} - 1 = 0, \quad (12.14)$$

где

$$a_1 = \delta_{11}^* (\delta_{11}^* - \delta_{22}^*) (\delta_{22}^* - \delta_{33}^*);$$

$$a_2 = \delta_{11}^* (2\delta_{11}^* - \delta_{22}^* - \delta_{33}^*) + \delta_{22}^* (\delta_{22}^* - \delta_{33}^*);$$

$$a_3 = \delta_{11}^* + \delta_{22}^* + \delta_{33}^*.$$

Подставив значения единичных перемещений, получим:

$$a_1 = 0,0204 \cdot 10^{-5}; \quad a_2 = -0,370 \cdot 10^{-10};$$

$$a_3 = 1,613 \cdot 10^{-5}.$$

Разделим все коэффициенты уравнения (12.14) на a_1 :

$$[C^{*(t)}]^3 + b [C^{*(t)}]^2 + c C^{*(t)} + d = 0, \quad (12.15)$$

где $b = -18,137 \cdot 10^5$; $c = 79,069 \cdot 10^{10}$; $d = -49,020 \cdot 10^{15}$.

Решение этого кубического уравнения выполним известными методами.

Вводится новая переменная $y = C^{*(t)} + \frac{b}{3}$, тогда уравнение (12.15) принимает вид:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad (12.16)$$

где $2q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$; $3p = \frac{3c - b^2}{3}$.

Дискриминант этого уравнения $D = q^2 + p^3$, где

$$q = \frac{1}{2} \left[-\frac{2(18,137 \cdot 10^5)^3}{27} + \frac{18,137 \cdot 10^5 \cdot 79,069 \cdot 10^{10}}{3} - 49,020 \cdot 10^{15} \right] =$$

$$= -6,468 \cdot 10^{15};$$

$$p = \frac{1}{3} \left[\frac{3 \cdot 79,069 \cdot 10^{10} - (-18,137 \cdot 10^5)^2}{3} \right] = -10,294 \cdot 10^{10};$$

$$D = (-6,468 \cdot 10^{15})^2 + (-10,294 \cdot 10^{10})^3 = -1017,5 \cdot 10^8 < 0.$$

Так как дискриминант меньше нуля, то уравнение (12.16) имеет три действительных корня, которые равны:

$$y_1 = -2r \cos \frac{\varphi}{3}; \quad y_2 = 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right);$$

$$y_3 = 2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right),$$

где $r = -\sqrt{|p|}$; $\cos \varphi = \frac{q}{r^3}$;

$$r = -\sqrt{10,194 \cdot 10^{10}} = -3,193 \cdot 10^5;$$

$$\cos \varphi = \frac{-6,468 \cdot 10^{15}}{(-3,193 \cdot 10^5)^3} = 0,1987;$$

$$\varphi = 78^\circ 32'; \quad \frac{\varphi}{3} = 26^\circ 11';$$

$$y_1 = 2(-3,193 \cdot 10^5) \cdot \cos(26^\circ 11') = 5,730 \cdot 10^5;$$

$$y_2 = -2 \cdot 3,193 \cdot 10^5 \cdot \cos(60^\circ - 26^\circ 11') = -5,305 \cdot 10^5;$$

$$y_3 = -2 \cdot 3,193 \cdot 10^5 \cdot \cos(60^\circ + 26^\circ 11') = -0,426 \cdot 10^5.$$

Но $y_i = C^{*(i)} + \frac{b}{3}$, тогда

$$C^{*(1)} = y_2 - \frac{b}{3} = -5,305 \cdot 10^5 + \frac{18,137 \cdot 10^5}{3} = 0,7305 \cdot 10^5 \text{ кг/см};$$

$$C^{*(2)} = y_3 - \frac{b}{3} = -0,426 \cdot 10^5 + \frac{18,137 \cdot 10^5}{3} = 5,620 \cdot 10^5 \text{ кг/см};$$

$$C^{*(3)} = y_1 - \frac{b}{3} = 5,730 \cdot 10^5 + \frac{18,137 \cdot 10^5}{3} = 11,776 \cdot 10^5 \text{ кг/см}.$$

Сравним: $C^{*(1)} = 0,722 \cdot 10^5 \text{ кг/см}$ — приближенный способ; $C^{*(1)} = 0,7305 \cdot 10^5 \text{ кг/см}$ — точный способ. Расхождение составляет 1,9%.

б) *Рамы каркаса.* Жесткости толкающих упругих опор рам можно определить способами последовательных приближений и точным. Жесткости толкающих опор рам в уровнях первого и второго этажей одинаковы, так как $m_1 = m_2$. Вследствие этого $\rho_2 = 1$ и $\gamma_2 = 0$ (см. формулы 12.9). Из условия равночастотности перекрытий следует:

$$C_3^{(1)} = \gamma_3 + \rho_3 C_1^{(1)},$$

где $\gamma_3 = \frac{\lambda^4}{l^4} a [EI] (\rho_3 - 1)$; $\rho_3 = \frac{m_3}{m_1} = 0,630$.

Коэффициент частоты λ определяется из уравнения

$$\Phi(\lambda) = C_1^{*(1)} \cdot \frac{l^3}{[EI]} = 0,7305 \cdot 10^5 \frac{24^3 \cdot 10^6}{0,907 \cdot 10^5 \cdot 1265 \cdot 10} = 8,806.$$

По таблице для функции $\Phi(\lambda)$ [5] для полученного значения $\Phi(\lambda) = 8,806$ находим аргумент $\lambda_{11} = 1,394$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{1,394^4}{24^4 \cdot 10^8} \cdot 600 \cdot 0,907 \cdot 10^5 \cdot 1265 \cdot 10^6 (0,630 - 1) = \\ &= -0,290 \cdot 10^4 \text{ кг/см}. \end{aligned}$$

Решим задачу определения жесткостей поперечных рам способом последовательных приближений. Единичные перемещения трехэтажной рамы, вычисленные по формулам табл. 5 приложений,

$C_1^{(1)}$	$0,048 \cdot 10^{-4} \cdot (1)$	$1 + (2)$	$X_1(\bar{x}_1) = \frac{0,326 \cdot 10^{-4}}{(3)}$	$0,481 \cdot 10^{-4} \cdot (1)$	$(4) \cdot (5)$	$0,807 \cdot 10^{-4} - (6)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

$0,752 \cdot 10^4$	0,036	1,036	$0,315 \cdot 10^{-4}$	0,362	$0,114 \cdot 10^{-4}$	$0,693 \cdot 10^{-4}$
$0,833 \cdot 10^4$	0,040	1,040	$0,313 \cdot 10^{-4}$	0,401	$0,126 \cdot 10^{-4}$	$0,681 \cdot 10^{-4}$
$0,847 \cdot 10^4$	0,041	1,041	$0,313 \cdot 10^{-4}$	0,407	$0,127 \cdot 10^{-4}$	$0,680 \cdot 10^{-4}$
$0,849 \cdot 10^4$	0,041	1,041	$0,313 \cdot 10^{-4}$	0,408	$0,128 \cdot 10^{-4}$	$0,679 \cdot 10^{-4}$

$X_1(x_1)$	$X_1(x_2)$	$X_1(x_3)$	$0,095 \times (3)$	$(1) + (4)$	$0,278 \cdot 10^{-4} \times (1)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$0,315 \cdot 10^{-4}$	$0,655 \cdot 10^{-4}$	$0,836 \cdot 10^{-4}$	$0,079 \cdot 10^{-4}$	$0,394 \cdot 10^{-4}$	$0,088 \cdot 10^{-8}$
$0,313 \cdot 10^{-4}$	$0,640 \cdot 10^{-4}$	$0,790 \cdot 10^{-4}$	$0,075 \cdot 10^{-4}$	$0,388 \cdot 10^{-4}$	$0,087 \cdot 10^{-8}$
$0,313 \cdot 10^{-4}$	$0,638 \cdot 10^{-4}$	$0,782 \cdot 10^{-4}$	$0,074 \cdot 10^{-4}$	$0,387 \cdot 10^{-4}$	$0,087 \cdot 10^{-8}$
$0,313 \cdot 10^{-4}$	$0,638 \cdot 10^{-4}$	$0,781 \cdot 10^{-4}$	$0,074 \cdot 10^{-4}$	$0,387 \cdot 10^{-4}$	$0,087 \cdot 10^{-8}$

имеют следующие значения: ◆

$$\delta_{11} = 0,278 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0,326 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг};$$

$$\delta_{22} = 0,730 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0,807 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг};$$

$$\delta_{33} = 1,335 \cdot 10^{-4} \text{ см/кг}.$$

Приложим к раме в уровне перекрытий сосредоточенные силы P_1, P_2, P_3 , равные:

$$P_1 = \gamma_1 + \rho_1 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10^4; \quad P_2 = \gamma_2 + \rho_2 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10^4;$$

$$P_3 = \gamma_3 + \rho_3 \cdot 10^4 = -0,290 \cdot 10^4 + 0,630 \cdot 10^4 = 0,340 \cdot 10^4.$$

От этих сил определим горизонтальное смещение верха рамы:

$$\delta = \delta_{31}P_1 + \delta_{32}P_2 + \delta_{33}P_3 = 1,587 \text{ см/кг}.$$

Жесткость толкающих опор в первом приближении определим по формуле:

$$C_1^{(1)} = \frac{6\bar{C}_1^{(1)} \cdot 10^4}{\delta} = \frac{6 \cdot 0,198 \cdot 10^4}{1,587} = 0,752 \cdot 10^4 \text{ кг/см}.$$

$0,077 \cdot 10^{-4} \cdot (1)$	$1 + (8)$	$X_1(x_2) = \frac{(7)}{(9)}$	$1,009 \cdot 10^{-4} \cdot (4)$	$0,528 \cdot 10^{-4} \cdot (10)$	$(11) + (12)$	$(13) \cdot (1)$	$X_1(x_2) = 1,335 \times 10^{-4} \cdot (14)$
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
0,058	1,058	$0,655 \cdot 10^{-4}$	$0,318 \cdot 10^{-8}$	$0,346 \cdot 10^{-8}$	$0,664 \cdot 10^{-8}$	$0,499 \cdot 10^{-4}$	$0,836 \cdot 10^{-4}$
0,064	1,064	$0,640 \cdot 10^{-4}$	$0,316 \cdot 10^{-8}$	$0,338 \cdot 10^{-8}$	$0,654 \cdot 10^{-8}$	$0,545 \cdot 10^{-4}$	$0,790 \cdot 10^{-4}$
0,065	1,065	$0,638 \cdot 10^{-4}$	$0,316 \cdot 10^{-8}$	$0,337 \cdot 10^{-8}$	$0,653 \cdot 10^{-8}$	$0,553 \cdot 10^{-4}$	$0,782 \cdot 10^{-4}$
0,065	1,065	$0,638 \cdot 10^{-4}$	$0,316 \cdot 10^{-8}$	$0,337 \cdot 10^{-8}$	$0,554 \cdot 10^{-8}$	$0,554 \cdot 10^{-4}$	$0,781 \cdot 10^{-4}$

Таблица II.14

$0,630 \times (3)$	$(2) + (7)$	$0,326 \cdot 10^{-4} \times (8)$	$(6) + (9)$	$C_1^{(1)} = \frac{(5)}{(10)}$
(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
$0,527 \cdot 10^{-4}$	$1,182 \cdot 10^{-4}$	$0,395 \cdot 10^{-8}$	$0,473 \cdot 10^{-8}$	$0,833 \cdot 10^4$
$0,498 \cdot 10^{-4}$	$1,138 \cdot 10^{-4}$	$0,371 \cdot 10^{-8}$	$0,458 \cdot 10^{-8}$	$0,847 \cdot 10^4$
$0,493 \cdot 10^{-4}$	$1,131 \cdot 10^{-4}$	$0,369 \cdot 10^{-8}$	$0,456 \cdot 10^{-8}$	$0,849 \cdot 10^4$
$0,492 \cdot 10^{-4}$	$1,131 \cdot 10^{-4}$	$0,369 \cdot 10^{-8}$	$0,456 \cdot 10^{-8}$	$0,849 \cdot 10^4$

Ординаты форм изгиба в первом приближении:

$$X_1(x_1) = \frac{\delta_{13}}{1 - C_1^{(1)}(\delta_{11} - \delta_{13})} = \frac{0,326 \cdot 10^4}{1 + 0,048 \cdot 10^4};$$

$$X_1(x_2) = \frac{\delta_{23} + C_1^{(1)}X_1(x_1)(\delta_{13} - \delta_{23})}{1 - C_1^{(1)}(\delta_{22} - \delta_{23})} =$$

$$= \frac{0,807 \cdot 10^4 - 0,481 \cdot 10^4 C_1^{(1)}X_1(x_1)}{1 + 0,077 \cdot 10^{-4} C_1^{(1)}}; \quad (12.17)$$

$$X_1(x_3) = \delta_{33} + C_1^{(1)}[X_1(x_1)(\delta_{13} - \delta_{33}) + X_1(x_2) \cdot (\delta_{23} - \delta_{33})] =$$

$$= 1,335 \cdot 10^{-4} - C_1^{(1)}[1,009 \cdot 10^{-4}X_1(x_1) + 0,528 \cdot 10^{-4}X_1(x_2)].$$

Во втором приближении жесткости толкающих опор будут:

$$C_1^{(1)} = \frac{X_1(x_1) - \delta_{13}\gamma_3 X_1(x_3)}{\delta_{11}X_1(x_1) + \delta_{13}[\rho_2 X_1(x_2) + \rho_3 X_1(x_3)]} =$$

$$= \frac{X_1(x_1) + 0,095X_1(x_3)}{0,278 \cdot 10^{-4}X_1(x_1) + 0,326 \cdot 10^{-4}[X_1(x_2) + 0,630X_1(x_3)]}. \quad (12.18)$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не совпадут (с определенной степенью точности) значения $X(x_k)$ предыдущего и

ρ	0	1	2	3	4
$X_1(x_1) \cdot V_1(y_p)$	1	1,328	1,668	2,023	2,408
$X_1(x_2) \cdot V_1(y_p)$	2,038	2,706	3,399	4,123	4,908
$X_1(x_3) \cdot V_1(y_p)$	2,492	3,309	4,157	5,041	6,001

последующего циклов вычислений. Обычно это происходит после 3—4 циклов.

Вычисления $C_1^{(1)}$ и $X_1(x_k)$ по формулам (12.17) и (12.18) представлены в табл. II.13 и II.14. Этим способом можно определить $C_1^{(1)}$ и $X(x_k)$ для зданий любой этажности, имеющих в уровнях перекрытий разные погонные массы. Жесткость толкающих упругих опор рам можно также определить из частотного уравнения (12.19):

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{C_1^{(1)}} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{C_1^{(1)}} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} - \frac{1}{\zeta_3 C_1^{(1)}} \end{vmatrix} = 0. \quad (12.19)$$

Уравнение (12.19) можно представить как

$$a_1 [C_1^{(1)}]^3 + a_2 [C_1^{(1)}]^2 + a_3 C_1^{(1)} + a_4 = 0, \quad (12.20)$$

где

$$a_1 = \rho_3 [\delta_{12}^2 (2\delta_{23} - \delta_{22} - \delta_{33}) + \delta_{11} (\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2)];$$

$$a_2 = \gamma_3 \frac{A_1}{\rho_3} - \rho_3 [\delta_{33} (\delta_{11} + \delta_{22}) - \delta_{12}^2 - \delta_{23}^2] - \delta_{11}\delta_{22} + \delta_{12};$$

$$a_3 = \rho_2 \delta_{33} + \delta_{11} + \delta_{22} - \gamma_3 [\delta_{33} (\delta_{11} + \delta_{22}) - \delta_{12}^2 - \delta_{23}^2]; \quad a_4 = \gamma_3 \delta_{33} - 1.$$

Уравнение (12.20) решается так же, как (12.14). Вычисленные из этого уравнения жесткости толкающих упругих опор равны:

$$C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = 0,850 \cdot 10^4 \text{ кг/см};$$

$$C_3^{(1)} = -0,290 \cdot 10^4 + 0,630 \cdot 0,850 \cdot 10^4 = 0,245 \cdot 10^4 \text{ кг/см}.$$

Первая частота собственных колебаний здания:

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{\lambda_{11}^4}{l^4} |EI| + \frac{C_1^{(1)}}{a} \right)} = 10,52 \text{ 1/сек.}$$

Формы собственных колебаний плоских элементов здания определяются по тем же формулам (12.17).

5	6	7	8	9	10
2,835	3,316	3,860	4,486	5,200	6,033
5,778	6,758	7,867	9,142	10,598	12,295
7,065	8,263	9,619	11,179	12,958	15,034

Диафрагмы жесткости:

$$X_1^*(x_1) = 0,0259 \cdot 10^{-4};$$

$$X_1^*(x_2) = 0,0482 \cdot 10^{-4};$$

$$X_1^*(x_3) = 0,0611 \cdot 10^{-4}.$$

Соотношение между ординатами форм собственных колебаний диафрагм:

$$\frac{X_1^*(x_2)}{X_1^*(x_1)} = 1,861; \quad \frac{X_1^*(x_3)}{X_1^*(x_1)} = 2,359.$$

Рамы каркаса:

$$X_1(x_1) = 0,313 \cdot 10^{-4}; \quad X_1(x_2) = 0,638 \cdot 10^{-4}; \quad X_1(x_3) = 0,780 \cdot 10^{-4}.$$

Соотношение между ординатами форм:

$$\frac{X_1(x_2)}{X_1(x_1)} = 2,038; \quad \frac{X_1(x_3)}{X_1(x_1)} = 2,492.$$

Перекрытия. Формы собственных колебаний перекрытий определяются по формулам (12.12), где $u = \frac{\lambda_{11}}{l} = 0,581 \cdot 10^{-3}$.

Формы собственных колебаний здания приведены в табл. II.15.

§ 13. ОБЩИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗДАНИЙ КАК ЕДИНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Приведенные в § 12 частотные уравнения получены для распространенных, но все же частных типов зданий. Они мало приспособлены для использования электронно-вычислительных машин. Излагаемый ниже алгоритм метода расчета этих недостатков не имеет: число и расположение вертикальных диафрагм жесткости может быть произвольным.

Рассмотрим собственные колебания выделенного из здания перекрытия первого этажа. Влияние поперечных рам моделируем упругим основанием, а вертикальных диафрагм жесткости — упругими опорами.

Используем для расчета метод сил. Основную систему получим из заданной, отделяя все упругие опоры (диафрагмы жесткости) от перекрытия.

Уравнения совместности перемещений в уровне перекрытия первого этажа неполного каркаса (рамы и перекрытия) и вертикальных диафрагм жесткости:

$$\left[\delta_{11}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_1^{*(i)}} \right] R_{ij}(d_1) + \delta_{12}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_2) + \dots$$

$$\dots + \delta_{1t_1}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_{t_1}) = 0;$$

$$\delta_{21}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_1) + \left[\delta_{22}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_{II}^{*(i)}} \right] R_{ij}(d_2) + \dots$$

$$\dots + \delta_{2t_1}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_{t_1}) = 0; \quad (13.1)$$

.....

$$\delta_{t_1 1}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_1) + \delta_{t_1 2}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_2) + \dots$$

$$\dots + \left[\delta_{t_1 t_1}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_{t_1}^{*(i)}} \right] R_{ij}(d_{t_1}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots),$$

где ij — номера форм колебаний здания в поперечной плоскости и в плане; t_1 — число вертикальных диафрагм жесткости; $C_1^{*(i)}$,, $C_{t_1}^{*(i)}$ — жесткости толкающих опор вертикальных диафрагм; $\delta_{rs}(\lambda_{ij})$ — единичные перемещения перекрытий (перемещения от сил, имеющих единичную амплитуду и пульсирующих с приведенной частотой λ_{ij}); $R_{ij}(d_s)$ — усилия взаимодействия между неполным каркасом здания и вертикальными диафрагмами жесткости.

В уровнях перекрытий остальных этажей, в силу принятой гипотезы о подобии форм колебаний всех вертикальных элементов здания, совместность перемещений неполного каркаса и вертикальных диафрагм обеспечивается автоматически. Поэтому порядок системы уравнений (13.1) не зависит от числа этажей здания и равен количеству вертикальных диафрагм жесткости.

Единичные перемещения перекрытий $\delta_{rs}(\lambda_{ij})$ определяются по формуле, полученной путем разложения единичных перемещений в ряд по формам собственных колебаний расчлененной основной системы — перекрытий на поддерживающих упругих опорах и поперечных рам с толкающими упругими опорами той же жесткости:

$$\delta_{rs}(\lambda_{ij}) = \frac{l^3}{2[EI]} \left\{ 4 \sum_{j'=1}^p \frac{V_{j'}(\bar{d}_r) V_{j'}(\bar{d}_s)}{\mu_{j'}^4 - \lambda_{ij}^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{ij}^4} [1 + 3(1 - 2\bar{d}_r)(1 - 2\bar{d}_s)] \right\}, \quad (13.2)$$

где $V_{j'}(\bar{d})$ — ординаты форм собственных колебаний перекрытий в основной системе, определяемые по табл. 4 приложений; $\mu_{j'}$ — значения собственных чисел перекрытий, рассматриваемых как безопорные балки на упругом основании (табл. 7 приложений); p —

число учитываемых в расчете форм собственных колебаний; d_r , d_s — расстояния от крайней левой оси здания до осей диафрагм жесткости с номерами r и s ; $[EI]$ — приведенная изгибная жесткость сборных перекрытий; $\bar{d}_r = \frac{d_r}{L}$; $\bar{d}_s = \frac{d_s}{L}$; $l = \frac{L}{2}$; L — длина здания.

Частотные уравнения здания как единой пространственной системы для i -й серии частот имеют вид:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_1^{*(i)}} & \delta_{12}(\lambda_{ij}) & \dots & \delta_{1t_1}(\lambda_{ij}) \\ \delta_{21}(\lambda_{ij}) & \delta_{22}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_{II}^{*(i)}} & \dots & \delta_{2t_1}(\lambda_{ij}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{t_1 1}(\lambda_{ij}) & \delta_{t_1 2}(\lambda_{ij}) & \dots & \delta_{t_1 t_1}(\lambda_{ij}) + \frac{1}{C_{t_1}^{*(i)}} \end{vmatrix} = 0. \quad (13.3)$$

Для отделения корней частотного уравнения λ_{ij} с любой наперед заданной точностью может быть использована теорема о степени неустойчивости [8].

Частоты собственных колебаний определяются по формуле

$$\omega_{ij} = \sqrt{\left\{ \frac{\lambda_{ij}^4}{i^4} [EI] + \frac{t_2 C_1^{(i)}}{L} \right\} \frac{1}{m}}. \quad (13.4)$$

Определив частоты ω_{ij} собственных колебаний здания, соответствующие им формы вычисляют следующим образом.

Усилия взаимодействия между каркасом здания и крайней диафрагмой (с номером t_1) в уровне перекрытия первого этажа принимают за единицу. Остальные неизвестные в том же уровне определяют из уравнений (13.1), осуществляя обратный ход по Гауссу.

Ординаты форм собственных колебаний вычисляют как

$$V_{ij}(x_k, y_r) = X_i(x_k) \sum_{s=1}^{t_1} \delta_{rs}(\lambda_{ij}) R_{ij}(d_s), \quad (13.5)$$

где y_r — расстояние от левого торца здания до сечения с номером r , в котором определяются ординаты формы колебаний здания.