

РАСЧЕТ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЕТРА

§ 23. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Турбулентный поток ветра вызывает колебания зданий относительно положения равновесия, определяемого воздействием статического напора ветра. При расчете зданий принято указанные два вида воздействия ветровой нагрузки учитывать независимо, причем статическое деформирование рассматривать как детерминистический, а колебания от пульсаций ветрового потока как стационарный, случайный процесс. При этом используется плоская расчетная модель здания.

В данной главе рассматривается вероятностный динамический метод расчета на воздействие турбулентных пульсаций ветра каркасных зданий с учетом пространственной работы.

Изложение теории расчета целесообразно вести на примере каркасных зданий повышенной этажности рамно-связевой конструктивной схемы с большим числом диафрагм жесткости. Как показали натурные эксперименты и расчеты, при большом числе диафрагм жесткости (начиная с четырех) поступательные, крутильные и изгибные колебания становятся независимыми (см. рис. I.13—I.15). Условные названия видов колебаний определяют характер перемещений в плане. В первом случае здание совершает колебания как плоская система (поступательные перемещения перекрытий в своей плоскости), во втором и третьем — здание колеблется как пространственная система (вращение перекрытия как жесткого диска и деформации в своей плоскости).

Формы колебаний перекрытий в плане весьма близки к формам колебаний зданий регулярной структуры (каркасные здания рамной конструктивной схемы, крупнопанельные здания). Это дает основание упростить расчет формальным сведением нерегулярных по структуре зданий к регулярным, ограничившись «интегральным» учетом жесткостных характеристик диафрагм жесткости.

Если здание имеет повышенную этажность, то для этих диафрагм допустимо учитывать лишь деформации изгиба. Поперечные рамы моделируются стержнем, работающим на сдвиг (см. § 11.)

Полученные таким образом результаты легко переносятся на другие типы зданий (каркасные здания рамно-связевой конструктивной схемы с малым числом диафрагм жесткости, каркасные здания рамной конструктивной схемы и др.). Конструктивные особенности зданий в конечном счете отражаются не в структуре расчетных формул для определения сил инерции, а в способах определения динамических характеристик — частот и форм собственных колебаний.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ДИАФРАГМ

Выведем дифференциальные уравнения вынужденных колебаний каркасных зданий с большим числом диафрагм.

Как указывалось в предыдущем параграфе, если число диафрагм больше трех-четырёх, формы колебания симметричного в плане здания разделяются на поступательные, крутильные и изгибные.

А. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е у р а в н е н и е п о с т у п а т е л ь н ы х к о л е б а н и й (рис. I.13)

Двумя горизонтальными сечениями, расположенными на расстоянии x и $x + dx$ от основания расчетной схемы здания, выделим элементарную полоску. По второму закону динамики уравнение ее движения может быть записано в следующем виде:

$$m(x) L dx \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = dx \left[\sum_{s=1}^{t_1} p_s(x, t) + \sum_{s=1}^{t_1} \bar{p}_s(x, t) + \sum_{\alpha=1}^{t_2} r_\alpha(x, t) + \sum_{\alpha=1}^{t_2} \bar{r}_\alpha(x, t) + \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v(x, t) \right], \quad (24.1)$$

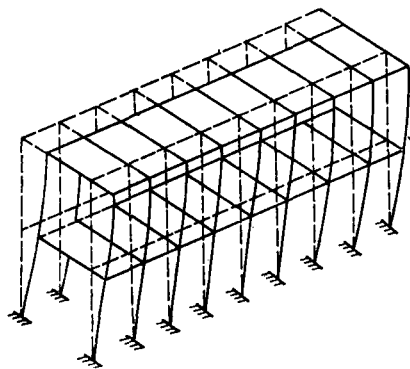


Рис. 1.13. Деформированное состояние здания при поступательных колебаниях.

где $W(x, t)$ — горизонтальные перемещения здания; $p_s(x, t)$; $r_\alpha(x, t)$ — интенсивности упругих сил отпора диафрагм и рам; $\bar{p}_s(x, t)$; $\bar{r}_\alpha(x, t)$ — интенсивности сил неупругого сопротивления; $q_v(x, t)$ — интенсивность внешних нагрузок, приведенных к вертикальным элементам здания; $m(x)$ — массы, приходящиеся на единицу площади фасада здания; t_1, t_2 — число диафрагм и рам; L — длина здания.

Силы отпора и силы неупругого сопротивления можно определить по формулам:

$$p_s(x, t) = -E_s I_s \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4}; \quad r_\alpha(x, t) = C_\alpha \cdot \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2};$$

$$\bar{p}_s(x, t) = -\frac{\gamma}{\omega_0} E_s I_s \frac{\partial^5 W(x, t)}{\partial x^4 \partial t}; \quad \bar{r}_\alpha(x, t) = \frac{\gamma}{\omega_0} C_\alpha \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^2 \partial t}, \quad (24.2)$$

где $E_s I_s$ — изгибная жесткость диафрагмы (s — номер диафрагмы); ω_0 — преобладающая частота вынужденных колебаний; γ — коэффициент неупругого сопротивления; $hC_\alpha = \frac{12}{\frac{1}{s_c} + \frac{1}{r_p}}$ — коэф-

фициент жесткости, численно равный силе, вызывающей единичный перекося рамы; s_c, r_p — суммарные погонные жесткости стоек и ригелей поперечной рамы в пределах этажа; h — высота этажа.

Подставляя выражения (24.2) в (24.1) и сокращая на dx , получим дифференциальное уравнение вынужденных поступательных колебаний

$$m(x) L \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \sum_{s=1}^{t_1} \frac{\gamma}{\omega_0} E_s I_s \frac{\partial^5 W(x, t)}{\partial x^4 \partial t} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{\alpha=1}^{t_2} \frac{\gamma}{\omega_0} C_\alpha \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v(x, t). \quad (24.3)$$

Для практических приложений более удобной является комплексная форма дифференциальных уравнений. Руководствуясь общим правилом, перейдем к комплексным функциям $W^*(x, t)$, $q_v^*(x, t)$, умножив в дифференциальном уравнении (24.3) упругое усилие на множитель $(u + i\bar{v})$ (здесь и далее для мнимой единицы принято обозначение i). Величины u и \bar{v} , учитывающие диссипацию энергии,

связаны соотношением:

$$u = \frac{4 - \gamma^2}{4 + \gamma^2}; \quad \bar{v} = \frac{4\gamma}{4 + \gamma^2}; \quad \gamma = \frac{\delta}{\pi},$$

где δ — логарифмический декремент колебаний.

Будем считать, что коэффициенты u и \bar{v} одинаковы для всех вертикальных и горизонтальных элементов здания (для отдельного учета коэффициентов u и \bar{v} в настоящее время еще не накоплен соответствующий экспериментальный материал). При этих допущениях дифференциальное уравнение вынужденных поступательных колебаний здания будет иметь вид:

$$m(x)L \frac{\partial^2 W^*(x, t)}{\partial t^2} + (u + \bar{iv}) \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s \frac{\partial^4 W^*(x, t)}{\partial x^4} - (u + \bar{iv}) \sum_{\alpha=1}^{t_2} C_{\alpha} \frac{\partial^2 W^*(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v^*(x, t). \quad (24.4)$$

Б. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний (рис. 1.14)

Как и в предыдущем случае, рассмотрим движение выделенной из расчетной схемы здания элементарной полоски. При крутильных колебаниях зданий

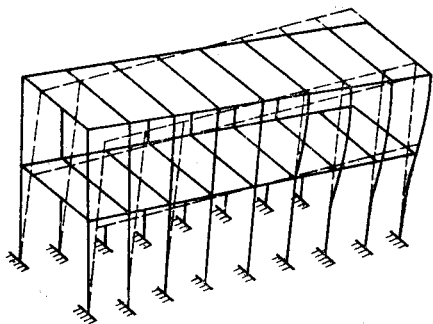


Рис. 1.14. Деформированное состояние здания при крутильных колебаниях.

эта полоска поворачивается в плане относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс (жесткостей) здания. Тогда по второму закону динамики произведение момента инерции масс на угловое ускорение равно сумме моментов, действующих на элементарную полоску:

$$m(x)Ldx \frac{I_p}{F} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = dx \left(\sum_{s=1}^{t_1} p_s(x, t)(d_s - l) + \sum_{s=1}^{t_1} \bar{p}_s(x, t)(d_s - l) + \sum_{\alpha=1}^{t_2} r_{\alpha}(x, t)(d_{\alpha} - l) + \sum_{\alpha=1}^{t_2} \bar{r}_{\alpha}(x, t)(d_{\alpha} - l) + \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v(x, t)(d_v - l) \right), \quad (24.5)$$

где $\psi(x, t)$ — угол поворота перекрытия в уровне x относительно вертикальной оси; I_p, F — полярный момент инерции и площадь перекрытия в плане; d_s, d_{α} — расстояние от начала координат в направлении горизонтальной оси y (началом является левый торец

здания) соответственно до вертикальных диафрагм жесткости и поперечных рам; $l = \frac{L}{2}$; L — длина здания.

Усилия $p_s(x, t)$, $\bar{p}_s(x, t)$ и $\bar{r}_\alpha(x, t)$, $\bar{r}_\alpha(x, t)$ определяются по формулам (24.2). Подставляя их выражения в (24.5), а также учитывая, что $\psi(x, t) = \frac{W(x, 0, t)}{l}$, получим дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний

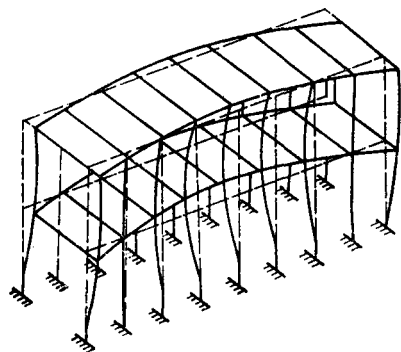
$$\begin{aligned}
 & m(x) L \frac{I_p}{l} \cdot \frac{\partial^2 W(x, 0, t)}{\partial t^2} + \sum_{s=1}^{i_1} E_s I_s \frac{\partial^4 W(x, y_s, t)}{\partial x^4} (d_s - l) + \\
 & + \sum_{s=1}^{i_1} \frac{\gamma}{\omega_0} E_s I_s \frac{\partial^6 W(x, d_s, t)}{\partial x^4 \partial t} (d_s - l) - \sum_{\alpha=1}^{i_2} C_\alpha \frac{\partial^2 W(x, d_\alpha, t)}{\partial x^2} \times \\
 & \times (d_\alpha - l) - \sum_{\alpha=1}^{i_2} \frac{\gamma}{\omega_0} C_\alpha \frac{\partial^3 W(x, d_\alpha, t)}{\partial x^2 \partial t} (d_\alpha - l) = \sum_{v=1}^{i_1+i_2} q_v(x, t) (d_v - l).
 \end{aligned} \quad (24.6)$$

В комплексной форме это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & m(x) L \frac{I_p}{l} \cdot \frac{\partial^2 W^*(x, 0, t)}{\partial t^2} + (u + i\bar{v}) \sum_{s=1}^{i_1} E_s I_s \frac{\partial^4 W^*(x, y_s, t)}{\partial x^4} \times \\
 & \times (d_s - l) - (u + i\bar{v}) \sum_{\alpha=1}^{i_2} C_\alpha \frac{\partial^2 W^*(x, y_\alpha, t)}{\partial x^2} (d_\alpha - l) = \\
 & = \sum_{v=1}^{i_1+i_2} q_v^*(x, t) (d_v - l).
 \end{aligned} \quad (24.7)$$

В. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний (рис. 1.15)

При поступательных и крутильных колебаниях выделенная из здания двумя горизонтальными сечениями элементарная полоска имеет соответственно одну и две степени свободы. При изгибных колебаниях она имеет бесконечно большое число степеней свободы за счет учета деформативности перекрытий в своей плоскости, а поэтому условия динамического равновесия (уравнения динамики) должны быть записаны в дифференциальной форме относительно двух переменных x и y .



Двама вертикальными сечениями, расположенными на расстояниях y и $y + dy$, выделим из эле-

Рис. 1.15. Деформированное состояние здания при изгибных колебаниях.

ментарной полоски бесконечно малый элемент с размерами dx и dy . Естественно, что жесткости всех вертикальных элементов при таком подходе следует принять равномерно распределенными по всей длине здания.

Уравнение движения рассматриваемого бесконечно малого элемента:

$$m(x) dx dy \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = dx dy \left(- \frac{[EI]}{h} \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial t^4} - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{[EI]}{h} \frac{\partial^5 W(x, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + p_s(x, y, t) + \bar{p}_s(x, y, t) + \right. \\ \left. + r_\alpha(x, y, t) + \bar{r}_\alpha(x, y, t) + q(x, y, t) \right), \quad (24.8)$$

где $[EI]$ — приведенная жесткость перекрытия.

Интенсивности упругого и неупругого отпоров вертикальных диафрагм и поперечных рам определяются по формулам:

$$p_s(x, y, t) = - \frac{\sum_{s=1}^{I_1} E_s I_s}{L} \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial x^4}; \quad \bar{p}_s(x, y, t) = \\ = - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\sum_{s=1}^{I_1} E_s I_s}{L} \frac{\partial^5 W(x, y, t)}{\partial x^4 \partial t}; \\ r_\alpha(x, y, t) = \frac{\sum_{\alpha=1}^{I_2} C_\alpha}{L} \cdot \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2}; \quad \bar{r}_\alpha(x, y, t) = \\ = \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\sum_{\alpha=1}^{I_2} C_\alpha}{L} \cdot \frac{\partial^3 W(x, y, t)}{\partial x^2 \partial t}. \quad (24.9)$$

Подставляя в уравнение (24.8) выражения (24.9), получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m(x) \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} + \frac{[EI]}{h} \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{[EI]}{h} \frac{\partial^5 W(x, y, t)}{\partial y^4 \partial t} + \\ + \frac{\sum_{s=1}^{I_1} E_s I_s}{L} \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial x^4} - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\sum_{s=1}^{I_1} E_s I_s}{L} \frac{\partial^5 W(x, y, t)}{\partial x^4 \partial t} - \frac{\sum_{\alpha=1}^{I_2} C_\alpha}{L} \times \\ \times \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\sum_{\alpha=1}^{I_2} C_\alpha}{L} \frac{\partial^3 W(x, y, t)}{\partial x^2 \partial t} = q(x, y, t). \quad (24.10)$$

В комплексной форме это уравнение имеет вид

$$m(x) \frac{\partial^2 W^*(x, y, t)}{\partial t^2} + \frac{[EI]}{h} (u + \bar{i}v) \frac{\partial^4 W^*(x, y, t)}{\partial y^4} +$$

$$+ \frac{\sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s}{L} (u + \bar{i}v) \frac{\partial^4 W^*(x, y, t)}{\partial x^4} - \frac{\sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha}{L} (u + \bar{i}v) \times$$

$$\times \frac{\partial^2 W^*(x, y, t)}{\partial x^2} = q^*(x, y, t). \quad (24.11)$$

§ 25. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗДАНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ГЛАВНЫМ ФОРМАМ

Решим вначале задачу о вынужденных поступательных колебаниях зданий.

Дифференциальное уравнение вынужденных поступательных колебаний зданий (24.4) имеет комплексные коэффициенты. Поэтому перемещение $W^*(x, t)$ является комплексной функцией вещественных переменных x и t . Внешние силы $q_v^*(x, t)$ также представляются в комплексной форме. Комплексные перемещения $W^*(x, t)$ и силы $q_v^*(x, t)$ определены так, что их действительные части совпадают с $W(x, t)$ и $q_v(x, t)$, а мнимые представляют собой сопряженные величины. (Здесь сопряженность понимается в смысле теории рядов Фурье.)

Решение дифференциального уравнения (24.4) представим в виде

$$W^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) f_i^*(t), \quad (25.1)$$

где $X_i(x)$ — главные формы колебаний (известные собственные функции); $f_i^*(t)$ — комплексные функции времени (обобщенные координаты), подлежащие определению.

Подставляя (25.1) в уравнение (24.4), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[m(x) L X_i(x) \ddot{f}_i^*(t) + (u + \bar{i}v) X_i^{IV}(x) f_i^*(t) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s - (u + \bar{i}v) X_i''(x) f_i^*(t) \sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha \right] = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v^*(x, t). \quad (25.2)$$

Функции $X_i(x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$X_i^{IV}(x) - 2a^2 X_i''(x) - b^4 X_i(x) = 0 \quad (25.3)$$

(см. вывод в § 28), где

$$a^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha}{2 \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s}; \quad b^4 = \frac{m(x) L \omega_i^2}{\sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s}.$$

Подставляя (25.3) в уравнение (25.2), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(x) LX_i(x) [\ddot{f}_i^*(t) + (u + \bar{iv}) \omega_i^2 f_i^*(t)] = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} q_v^*(x, t). \quad (25.4)$$

Умножим обе части уравнения на $X_j(x)$ и проинтегрируем в пределах высоты здания

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{f}_i^*(t) + (u + \bar{iv}) \omega_i^2 f_i^*(t)] \int_0^H m(x) LX_i(x) X_j(x) dx = \\ = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_j(x) dx. \end{aligned} \quad (25.5)$$

В силу условий ортогональности

$$L \int_0^H m(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j)$$

в левой части уравнения (25.5) останется всего один член с номером j

$$\begin{aligned} [\ddot{f}_j^*(t) + (u + \bar{iv}) \omega_j^2 f_j^*(t)] \int_0^H m(x) LX_j^2(x) dx = \\ = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_j(x) dx. \end{aligned}$$

Поскольку это равенство справедливо для любого j , то можно сделать замену индекса j на i , т. е.

$$\ddot{f}_i^*(t) + (u + \bar{iv}) \omega_i^2 f_i^*(t) = \frac{\sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_i(x) dx}{L \int_0^H m(x) X_i^2(x) dx} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (25.6)$$

Независимые дифференциальные уравнения (25.6) служат для определения искомых обобщенных координат $f_i^*(t)$.

Перейдем теперь к решению задачи о вынужденных крутильных колебаниях. Как и в предыдущем случае, решение получим с помощью разложений по главным формам:

$$W^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \left(\frac{y}{l} - 1 \right) f_i^*(t). \quad (25.7)$$

Функции $X_i(x)$ в этом случае удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$X_i^{IV}(x) - 2a^2 X_i''(x) - b^4 X_i(x) = 0, \quad (25.8)$$

где

$$a^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{t_2} C_{\alpha} \left(\frac{d_{\alpha}}{l} - 1 \right) (d_{\alpha} - l)}{2 \sum_{s=1}^{t_1} E_s J_s \left(\frac{d_s}{l} - 1 \right) (d_s - l)}; \quad b^4 = \frac{m(x) I_p \omega^2}{Fl \sum_{s=1}^{t_1} E_s J_s \left(\frac{d_s}{l} - 1 \right) (d_s - l)}.$$

Подставив (25.7) в дифференциальное уравнение крутильных колебаний (24.7) и выполнив операции, аналогичные вышеприведенным, окончательно получим:

$$\ddot{f}_i^*(t) + (u + i\bar{v}) \omega_i^2 f_i^*(t) = \frac{\sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_i(x) (d_v - l) dx}{\frac{L I_p}{Fl} \int_0^H m(x) X_i^2(x) dx} \quad (i = 1, 2 \dots). \quad (25.9)$$

Решение дифференциальных уравнений изгибных колебаний (24.11) представим в виде

$$W^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} X_i(x) V_j(y) f_{ij}^*(t), \quad (25.10)$$

где $V_j(y)$ — формы собственных колебаний перекрытий, удовлетворяющие уравнению

$$V_i^{IV}(y) - \left(\frac{\lambda_j}{l} \right)^4 V_j(y) = 0. \quad (25.11)$$

Этим формам колебаний соответствуют собственные числа: $\lambda_1 = 2,365$; $\lambda_2 = 3,925$; $\lambda_3 = 5,50$ и др.

Функции $X_i(x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$X_i^{IV}(x) - 2a^2 X_i''(x) - b^4 X_i(x) = 0, \quad (25.12)$$

где

$$a^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{t_2} C_{\alpha}}{2 \sum_{s=1}^{t_1} E_s J_s}; \quad b^4 = \frac{L \left[m(x) \omega_{ij}^2 - \frac{[EI]}{h} \left(\frac{\lambda_j}{l} \right)^4 \right]}{\sum_{s=1}^{t_1} E_s J_s}.$$

Дифференциальные уравнения для определения обобщенных координат имеют вид:

$$\ddot{f}_{ij}^*(t) + (u + i\bar{v}) \omega_{ij}^2 f_{ij}^*(t) = \frac{\int_0^H \int_0^L q^*(x, y, t) X_i(x) V_j(y) dx dy}{\int_0^H \int_0^L m(x) X_i^2(x) V_j^2(y) dx dy}. \quad (25.13)$$

§ 26. КОЛЕБАНИЯ ПРИВЕДЕННОЙ ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ
ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗДАНИЯ

Используя метод разложений по главным формам, мы пришли в конечном счете к задаче о колебании приведенной одномассовой системы. Дифференциальные уравнения (25.6), (25.9) и (25.13) для обобщенных координат $f_{ij}(t)$ имеют одинаковую структуру и их можно представить в следующем виде:

$$\ddot{f}_{ij}^*(t) + (u + i\bar{v}) \omega_{ij}^2 f_{ij}^*(t) = \frac{1}{M_{ij}} Q_{ij}^* \quad (26.1)$$

где Q_{ij}^* — обобщенная сила, равная

$$Q_{ij}^* = Q_i^{*n} = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_i^n(x) dx \quad \text{— для поступательных колебаний;}$$

$$Q_{ij}^* = Q_i^{*k} = \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H q_v^*(x, t) X_i^k(x) (d_v - l) dx \quad \text{— для крутильных;} \quad (26.2)$$

$$Q_{ij}^* = Q_{ij}^{*h} = \int_0^H \int_0^L q^*(x, y, t) X_i^h(x) V_j(y) dx dy \quad \text{— для изгибных;}$$

M_{ij} — обобщенная масса, равная

$$M_{ij} = M_i^n = L \int_0^H m(x) [X_i^n(x)]^2 dx \quad \text{— для поступательных колебаний;}$$

$$M_{ij} = M_i^k = \frac{Ll_p}{Fl} \int_0^H m(x) [X_i^k(x)]^2 dx \quad \text{— для крутильных;} \quad (26.3)$$

$$M_{ij} = M_{ij}^h = \int_0^H \int_0^L m(x) [X_i^h(x)]^2 V_j^2(y) dx dy \quad \text{— для изгибных.}$$

Функции $f_{ij}^*(t)$ и Q_{ij}^* — комплексные.

Примем, что интенсивность пульсаций давлений по высоте и длине здания не коррелирована и равна произведению стационарной случайной функции времени на функцию координат:

$$\begin{aligned} \varphi(t) & \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx; \\ \varphi(t) & \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^k(x) (d_v - l) dx; \\ \varphi(t) & \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^h(x) V_j(y) dx dy, \end{aligned} \quad (26.4)$$

где $\sqrt{b_{xy}(0)}$ — стандарт интенсивности распределенных по длине и высоте здания пульсирующих ветровых нагрузок; $\sqrt{B_{xv}(0)}$ — стандарт интенсивности пульсирующих ветровых нагрузок, приведенных к вертикальным элементам здания; $\varphi(t)$ — случайная функция времени.

Определим вначале реакцию системы на единичное воздействие $e^{i\omega t}$. Для определения комплексного коэффициента передачи $\Phi_{ij}(\bar{i}\omega)$ ij -й формы примем $\varphi(t) = e^{i\omega t}$. Тогда

$$f_i^*(t) = \Phi_{ij}(\bar{i}\omega) e^{i\omega t}. \quad (26.5)$$

При подстановке (26.5) в уравнение (26.1) имеем: для поступательных колебаний

$$\Phi_i^n(i\omega) = \frac{\sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx}{M_i^n [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_i^2]};$$

для крутильных

$$\Phi_i^k(\bar{i}\omega) = \frac{\sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^k(x) (d_v - l) dx}{M_i^k [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_i^2]}; \quad (26.6)$$

для изгибных

$$\Phi_{ij}^n(\bar{i}\omega) = \frac{\int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^n(x) V_j(y) dx dy}{M_{ij}^n [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_{ij}^2]}.$$

Комплексные функции перемещений $W^*(x, y, t)$ здания при поступательных, крутильных и изгибных колебаниях равны:

$$W_n^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^n(x) \Phi_i^n(\bar{i}\omega) e^{i\omega t};$$

$$W_k^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^k(x) \left(\frac{y}{l} - 1 \right) \Phi_i^k(i\omega) e^{i\omega t}; \quad (26.7)$$

$$W_n^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} X_i^n(x) V_j(y) \Phi_{ij}^n(i\omega) e^{i\omega t}.$$

Функции перемещений $W^*(x, y, t)$ могут быть также выражены через комплексные коэффициенты передачи $\Phi_w(\bar{i}\omega)$:

$$W_n^*(x, y, t) = \Phi_w^n(\bar{i}\omega) e^{i\omega t};$$

$$W_k^*(x, y, t) = \Phi_w^k(i\omega) e^{i\omega t}; \quad (26.8)$$

$$W_n^*(x, y, t) = \Phi_w^n(\bar{i}\omega) e^{i\omega t}.$$

Сравнивая формулы (26.8) с формулами (26.7) и используя выражения (26.6), получим:

$$\Phi_W^n(\bar{i}\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^n(x) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx}{M_i^n [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_i^2]} ;$$

$$\Phi_W^K(\bar{i}\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^K(x) \left(\frac{y}{l} - 1\right) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^K(x) (d_v - l) dx}{M_i^K [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_i^2]} ; (26.9)$$

$$\Phi_W^H(\bar{i}\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_i^H(x) V_j(y) \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^H(x) V_j(y) dx dy}{M_{ij}^H [-\omega^2 + (u + i\bar{v}) \omega_{ij}^2]} .$$

В дальнейшем число членов в разложениях (26.9) будем считать конечным (приближенное решение). Тогда квадраты комплексных коэффициентов передачи будут равны:

$$| \Phi_W^n(\bar{i}\omega) |^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{X_i^n(x) X_{i'}^n(x) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx \times \times \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_{i'}^n(x) dx \cos(\psi_i - \psi_{i'})}{M_i^n M_{i'}^n [\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2\omega^2 + \omega_{i'}^4]^{1/2}} ;$$

$$| \Phi_W^K(\bar{i}\omega) |^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{X_i^K(x) X_{i'}^K(x) \left(\frac{y}{l} - 1\right) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^K(x) (d_v - l) dx \times \times \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_{i'}^K(x) (d_v - l) dx \cos(\psi_i - \psi_{i'})}{M_i^K M_{i'}^K [\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2\omega^2 + \omega_{i'}^4]^{1/2}} ; (26.10)$$

$$| \Phi_W^H(\bar{i}\omega) |^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{j'=1}^p \frac{X_i^H(x) X_{i'}^H(x) V_j(y) V_{j'}(y) \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^H(x) V_j(y) dx dy \times \times \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_{i'}^H(x) V_{j'}(y) dx dy \cos(\psi_{ij} - \psi_{i'j'})}{M_{ij}^H M_{i'j'}^H [\omega^4 - 2u\omega_{ij}^2\omega^2 + \omega_{ij}^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'j'}^2\omega^2 + \omega_{i'j'}^4]^{1/2}} ,$$

где $\psi_{ij} = \arctg \frac{\bar{v}\omega_{ij}^2}{\omega^2 - u\omega_{ij}^2} .$

Дисперсия выхода системы $|\overline{W}(x, y, t)|^2$, как известно, определяется по формуле

$$|\overline{W}(x, y, t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_W(i\omega)|^2 S(\omega) d\omega, \quad (26.11)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность внешней силы.

Подставляя в (26.11) выражения (26.10), получим

$$\begin{aligned} & |\overline{W}(x, t)|_n^2 = \\ & X_i^n(x) X_{i'}^n(x) S(\omega) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx \times \\ & \times \sum_{v=0}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_{i'}^n(x) dx \cos(\psi_{it} - \psi_{i't}) \\ = & \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{v=0}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^n(x) dx \cos(\psi_{it} - \psi_{i't})}{M_i^n M_{i'}^n [\omega^4 - 2u\omega_i^2 \omega^2 + \omega_i^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2 \omega^2 + \omega_{i'}^4]^{1/2}} d\omega; \\ & |\overline{W}(x, y, t)|_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \frac{1}{2\pi} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_i^K(x) X_{i'}^K(x) \left(\frac{y}{l} - 1\right)^2 S(\omega) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^K(x) (d_v - l) dx \times \\ & \times \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_{i'}^K(x) (d_v - l) dx \cos(\psi_{it} - \psi_{i't}) \\ \times & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_i^K M_{i'}^K [\omega^4 - 2u\omega_i^2 \omega^2 + \omega_i^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2 \omega^2 + \omega_{i'}^4]^{1/2}}{M_i^K M_{i'}^K [\omega^4 - 2u\omega_i^2 \omega^2 + \omega_i^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2 \omega^2 + \omega_{i'}^4]^{1/2}} d\omega; \end{aligned} \quad (26.12)$$

$$\begin{aligned} & |\overline{W}(x, y, t)|_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{j'=1}^p \frac{1}{2\pi} \times \\ & X_i^H(x) X_{i'}^H(x) V_j(y) S(\omega) \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^H(x) V_j(y) dx dy \times \\ & \times \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_{i'}^H(x) V_{j'}(y) dx dy \cos(\psi_{ij} - \psi_{i'j'}) \\ \times & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{ij}^H M_{i'j'}^H [\omega^4 - 2u\omega_{ij}^2 \omega^2 + \omega_{ij}^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'j'}^2 \omega^2 + \omega_{i'j'}^4]^{1/2}}{M_{ij}^H M_{i'j'}^H [\omega^4 - 2u\omega_{ij}^2 \omega^2 + \omega_{ij}^4]^{1/2} [\omega^4 - 2u\omega_{i'j'}^2 \omega^2 + \omega_{i'j'}^4]^{1/2}} d\omega. \end{aligned}$$

Следуя М. Ф. Барштейну [3], для спектральной плотности случайной функции ветровой пульсирующей нагрузки примем следующее выражение:

$$S(\omega) = 2\psi \frac{\omega^2 + k^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4}, \quad (26.13)$$

где $\mu \leq \frac{\alpha}{\beta}$; $m^2 = \alpha^2 + \beta^2$; $a = \alpha^2 - \beta^2$; $\psi = \alpha - \mu\beta$; $k^2 = \frac{m^2(\alpha + \mu\beta)}{\alpha - \mu\beta}$;

α, β — параметры корреляционной функции вида

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos\beta|\tau| + \mu \sin\beta|\tau|), \quad (26.14)$$

Формула (26.14) получена М. Ф. Барштейном в результате обработки экспериментальных данных.

Подставим выражение (26.13) в формулы (26.12)

$$\begin{aligned}
 & |\overline{W}(x, t)|_n^2 = \\
 & = 2\psi \sum_{i=1}^n [\overline{\eta}_i^n(x)]^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4)(\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} + \\
 & \quad + 2\psi \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \overline{\eta}_i^n(x) \overline{\eta}_{i'}^n(x) \frac{1}{2\pi} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) \cos(\psi_i - \psi_{i'}) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4)^{1/2} (\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2\omega^2 + \omega_{i'}^4)^{1/2} (\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} ; \\
 & \quad |\overline{W}(x, y, t)|_n^2 = \\
 & = 2\psi \sum_{i=1}^n [\overline{\eta}_i^n(x, y)]^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4)(\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} + \\
 & \quad + 2\psi \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \overline{\eta}_i^n(x, y) \overline{\eta}_{i'}^n(x, y) \frac{1}{2\pi} \times \tag{26.15} \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) \cos(\psi_i - \psi_{i'}) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_i^2\omega^2 + \omega_i^4)^{1/2} (\omega^4 - 2u\omega_{i'}^2\omega^2 + \omega_{i'}^4)^{1/2} (\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} ; \\
 & \quad |\overline{W}(x, y, t)|_n^2 = \\
 & = 2\psi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [\overline{\eta}_{ij}^n(x, y)]^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_{ij}^2\omega^2 + \omega_{ij}^4)(\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} + \\
 & \quad + 2\psi \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{j'=1}^p \overline{\eta}_{ij}^n(x, y) \overline{\eta}_{i'j'}^n(x, y) \frac{1}{2\pi} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) \cos(\psi_{ij} - \psi_{i'j'}) d\omega}{(\omega^4 - 2u\omega_{ij}^2\omega^2 + \omega_{ij}^4)^{1/2} (\omega^4 - 2u\omega_{i'j'}^2\omega^2 + \omega_{i'j'}^4)^{1/2} (\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)} ;
 \end{aligned}$$

где

$$\overline{\eta}_i^n(x) = \frac{X_i^n(x) \sum_{\sigma=1}^{i_1+i_2} \int_0^H \sqrt{B_{x\sigma}(0)} X_i^n(x) dx}{M_i^n} ;$$

$$\bar{\eta}_i^k(x) = \frac{X_i^k(x) \left(\frac{y}{l} - 1 \right) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} \int_0^H \sqrt{B_{xv}(0)} X_i^k(x) (d_v - l) dx}{M_i^k}; \quad (26.16)$$

$$\bar{\eta}_{ij}^n(x, y) = \frac{X_i^n(x) V_j(y) \int_0^H \int_0^L \sqrt{b_{xy}(0)} X_i^n(x) V_j(y) dx dy}{M_{ij}^n}.$$

Вторые суммы в формулах (26.15) учитывают взаимную корреляцию между отдельными обобщенными координатами.

§ 27. РАСЧЕТ ПО НОРМАМ (С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАБОТЫ)

Пренебрегая в формулах (26.15) вторыми слагаемыми, учитывающими взаимную корреляцию между обобщенными координатами, получим следующие формулы для средних квадратов перемещений здания:

$$\begin{aligned} |\overline{W(x, t)}|_n^2 &= 2\psi \sum_{i=1}^n [\bar{\eta}_i^n(x)]^2 F(\omega); \\ |\overline{W(x, y, t)}|_k^2 &= 2\psi \sum_{i=1}^n [\bar{\eta}_i^k(x)]^2 F(\omega); \end{aligned} \quad (27.1)$$

$$|\overline{W(x, y, t)}|_n^2 = 2\psi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [\bar{\eta}_i^n(x)]^2 F(\omega),$$

$$\text{где } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 + k^2) d\omega}{(\omega^4 - 2\alpha\omega^2\omega^2 + \omega_i^4)(\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4)}. \quad (27.2)$$

Интеграл (27.2) можно вычислить по теории вычетов.

Формулы (27.1) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} |\overline{W(x, t)}|_n^2 &= \sum_{i=1}^n |\overline{W}_i(x, t)|_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\bar{\eta}_i^n(x)|^2}{\omega_i^4} \bar{\xi}_i^2; \\ |\overline{W(x, y, t)}|_k^2 &= \sum_{i=1}^n |\overline{W}_i(x, y, t)|_k^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\bar{\eta}_i^k(x)|^2}{\omega_i^4} \bar{\xi}_i^2; \\ |\overline{W(x, y, t)}|_n^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |\overline{W}_{ij}(x, y, t)|_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{|\bar{\eta}_i^n(x)|^2}{\omega_{ij}^2} \bar{\xi}_i^2, \end{aligned} \quad (27.3)$$

$$\text{где } \bar{\xi}_i^2 = \frac{\psi \left[\left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) \frac{\omega_i^4}{2\alpha} + \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) \gamma^2 \omega_i^3 + 2 \frac{\alpha k^2}{m^2} \omega_i^2 + \frac{k^2}{\gamma} \omega_i \right]}{\omega^4 + 2\alpha\gamma\omega_i^3 + 2a\omega_i^2 + 2\alpha\gamma m^2\omega_i + m^4} \quad (27.4)$$

средний квадрат коэффициента динамичности.

Формула (27.4) впервые была получена М. Ф. Барштейном применительно к расчету зданий без учета пространственной работы. Значения $\bar{\xi}_{ij}^2$ можно вычислить по (27.4), если ω_i заменить на ω_{ij} .

График стандарта $\xi = \sqrt{\bar{\xi}_i^2}$ для значений $\gamma = 0,05$ и $0,1$ приведен в СНиП II-A.11—62 (см. рис. 1.7).

Средние квадратические значения интенсивности инерционных сил здания, колеблющегося от воздействий пульсаций давления по главным (нормальным) формам, равны:

$$\begin{aligned} |\overline{q_i(x)}|_n^2 &= m^2(x) \omega_i^4 |\overline{W_i(x, t)}|_n^2; \\ |\overline{q_i(x, t)}|_k^2 &= m^2(x) \omega_i^4 |\overline{W_i(x, y, t)}|_k^2; \\ |\overline{q_{ij}(x, t)}|_n^2 &= m^2(x) \omega_{ij}^4 |\overline{W_{ij}(x, y, t)}|_n^2. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Учитывая формулы (27.3), получим:

$$\begin{aligned} |\overline{q_i(x)}|_n^2 &= m^2(x) |\overline{\eta_i^n(x)}|^2 \bar{\xi}_i^2; \\ |\overline{q_i(x, y)}|_k^2 &= m^2(x) |\overline{\eta_i^k(x)}|^2 \bar{\xi}_i^2; \\ |\overline{q_{ij}(x, y)}|_n^2 &= m^2(x) |\overline{\eta_{ij}^n(x)}|^2 \bar{\xi}_i^2. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Коэффициенты форм η определяются по формулам (26.16). В соответствии с нормами входящие в эти формулы стандарты интенсивностей пульсирующих ветровых нагрузок $\sqrt{B_{xv}(0)}$, $\sqrt{b_{xy}(0)}$ должны быть приняты равными произведению расчетных давлений ветра Q_x или q_{xy} на коэффициенты $u(x)$, $u(y)$ пульсаций скоростного напора, т. е.

$$\begin{aligned} \sqrt{B_{xv}(0)} &= Q_x u(x) u(y) = \bar{n} q_0 k_x c_x c_v a u(x) u(y); \\ \sqrt{b_{xy}(0)} &= q_{xy} u(x) u(y) = \bar{n} q_0 k_x c_x c_y u(x) u(y), \end{aligned} \quad (27.7)$$

где \bar{n} — коэффициент перегрузки; q_0 — нормативный скоростной напор ветра на уровне 10 м над поверхностью земли; k_x — поправочный коэффициент на возрастание скоростного напора ветра по высоте; c_x , c_v , c_y — аэродинамические коэффициенты, учитывающие неравномерность поля давления по высоте и длине при обтекании установившимся потоком; a — характерный размер по длине здания, с которого производится концентрация ветровых нагрузок на вертикальные элементы с номером v ; $u(x)$, $u(y)$ — функции, характеризующие неравномерность турбулентного поля давления по высоте и длине здания.

Тогда интенсивности динамической ветровой нагрузки в уровне перекрытия k -го этажа будут

$$q_{ij}(x, y) = m(x) \eta_{ij}(x, y) \xi_{ij}; \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (27.8)$$

Коэффициенты $\eta_{ij}(x, y)$, соответствующие поступательным, крутильным и изгибным колебаниям:

$$\eta_{11}(x) = \eta_{11}^n(x) \tau_1;$$

$$\eta_{i2}(x, y) = \eta_i^K(x) \tau_2(y); \quad (27.9)$$

$$\eta_{ip}(x, y) = \eta_i^H(x) \tau_p(y) \quad (\rho = 3, 4, \dots),$$

где

$$\eta_i^H(x) = \frac{X_i^H(x) \int_0^H \bar{n} q_0 k_x c_x u(x) X_i^H(x) dx}{\int_0^H m(x) [X_i^H(x)]^2 dx};$$

$$\eta_i^K(x) = \frac{X_i^K(x) \int_0^H \bar{n} q_0 k_x c_x u(x) X_i^K(x) dx}{\int_0^H m(x) [X_i^K(x)]^2 dx};$$

$$\eta_i^H(x) = \frac{X_i^H(x) \int_0^H \bar{n} q_0 k_x c_x u(x) X_i^H(x) dx}{\int_0^H m(x) [X_i^H(x)]^2 dx}; \quad (27.10)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{L} \sum_{v=1}^{i_1+i_2} c_{y_v} a_v u(y_v);$$

$$\tau_2(y) = \frac{F}{2I_p} \left(\frac{y}{l} - 1 \right) \sum_{v=1}^{i_1+i_2} c_{y_v} a_v u(y_v) (d_v - l);$$

$$\tau_p(y) = \frac{V_p(y) \int_0^L c_y u(y) V_p(y) dy}{\int_0^L V_p^2(y) dy}.$$

Функции $u(x)$, $u(y)$, входящие в формулы (27.10), характеризуют пространственную неоднородность поля турбулентных пульсаций. Как известно из динамики пограничного слоя атмосферы [16], характеристики порывистости ветра на уровнях в несколько десятков метров от земли и выше зависят от высоты. Эта зависимость (на основании теории подобия Казанского и Мони́на) с увеличением высоты представляется монотонно убывающей. Некоторые возможности теоретического определения рассматриваемой зависимости дает теория турбулентности, развитая в работах А. С. Мони́на, А. М. Обухова, А. М. Яглома. Имеются также и экспериментальные данные о профилях интенсивностей продольных пульсаций скорости (например, измерения В. Н. Иванова [17] на мачте в Обнинске) и о безразмерных профилях скоростей диссипации турбулентной энергии (измерения В. Н. Иванова и З. И. Волковицкой [18]). Однако систематизация экспериментальных данных метеорологами не производилась. Поэтому в первом приближении мы принимаем профиль турбулентных пульсаций $u(x)$ по высоте на

основании данных, содержащихся в нормах. В табл. 12 СНиП II-A. 11—62 на основании экспериментальных исследований даны значения функции $u(x)$ на различных высотах. Эти данные можно аппроксимировать следующими зависимостями:

$$u(x) = \begin{cases} 0,35 & \text{при } x \leq 20 \text{ м} \\ 0,3834 - 0,1336 \frac{x}{H} & \text{при } x > 20 \text{ м}; H = 80 \text{ м.} \end{cases} \quad (27.11)$$

Для определения функции $u(y)$ специальные экспериментальные исследования не производились. Поэтому до получения экспериментальных данных в практических расчетах рекомендуем функцию $u(y)$ принимать совпадающей с соответствующей формой собственных колебаний здания в плане:

для поступательных колебаний

$$u_1(y) = 1;$$

для крутильных

$$u_2(y) = \frac{y}{l} - 1;$$

для изгибных

$$u_3(y) = V_3(y) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda}{l} y + \cos \frac{\lambda}{l} y \right) + \eta \left(\operatorname{sh} \frac{\lambda}{l} y + \sin \frac{\lambda}{l} y \right), \quad (27.12)$$

где $\eta = \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - \cos 2\lambda}{2(\sin 2\lambda - \operatorname{sh} 2\lambda)}$; $\lambda = 2,365$.

При выработке данных рекомендаций авторы руководствовались следующими соображениями.

Рассматриваемая задача была сопоставлена с аналогичными задачами в других областях техники, например в самолетостроении. В динамических расчетах самолетов учитывается неоднородность поля турбулентных пульсаций ветрового потока. Как показали эксперименты, интенсивность пульсаций по длине самолета может изменяться в весьма широких пределах: от максимума до нуля. Нет оснований полагать, что в приземном слое атмосферы масштаб неоднородности турбулентных пульсаций будет больше, чем в верхних слоях. Кроме того, поскольку длина здания значительно больше длины самолета, размеры вихрей ветрового потока будут тем более соизмеримы с длиной здания.

Согласно данным авторов [28—34], производивших оценку масштабов пульсаций скорости по различным направлениям, характерные значения вертикального и поперечного масштабов продольных пульсаций скорости имеют порядок десятков метров. Поэтому для здания с подобными и меньшими размерами в плане эффект порывистости ветра будет иметь существенное значение. К сожалению, мы не располагаем какими-либо теоретическими или экспери-

ментальными данными о профиле поля турбулентных пульсаций по длине здания и сделаем в связи с этим некоторые допущения.

Обобщим на пространственную задачу допущения норм о характере распределения турбулентных пульсаций по длине здания. Как известно, расчетная модель здания принята в нормах плоской, в связи с этим учитываются лишь поступательные колебания здания. В соответствии с последним поле турбулентных пульсаций по длине здания принято равномерным. В пространственной расчетной схеме здание имеет дополнительные степени свободы по его длине и соответственно дополнительные крутильные и изгибные формы колебаний. Логично поэтому и для дополнительных форм колебаний принять аналогичное допущение о подобии поля турбулентных пульсаций формам колебания здания в плане.

С учетом рекомендаций (27.12) расчетные формулы для коэффициентов форм $\tau_j(y)$ примут следующий вид:

$$\tau_1 = \frac{1}{L} \sum_{v=1}^{t_1+t_2} c_{y_v} a_v;$$

$$\tau_2 = \frac{F}{2I_p} \left(\frac{y}{l} - 1 \right) \sum_{v=1}^{t_1+t_2} c_{y_v} a_v \left(\frac{y}{l} - 1 \right) (d_v - l); \quad (27.13)$$

$$\tau_3 = \frac{4}{L} V_3(y) \int_0^L c_y V_3^2(y) dy.$$

Здесь использовано известное равенство для собственных балочных функций

$$\int_0^L V_3^2(y) dy = \frac{L}{4}.$$

Принятие функций $u(y)$ в соответствии с формами собственных колебаний здания в плане дает возможность для каждого элемента здания отыскать невыгодное загрузение при движении вихрей, имеющих разный масштаб и разные частотные характеристики. Максимальные внутренние усилия в различных элементах здания могут возникать, вообще говоря, при разных загрузениях, не совпадающих по времени. Поэтому усилия как в горизонтальных, так и в вертикальных элементах, соответствующие различным формам собственных колебаний здания в плане, не должны суммироваться. Поскольку же по высоте здания поле турбулентных пульсаций считается детерминированным и представленным в виде разложений по собственным формам колебаний вертикальных элементов, внутренние усилия, соответствующие этим формам (назовем их парциальными) необходимо суммировать. Окончательные расчетные усилия в вертикальных элементах здания определяются как корень квадратный из суммы квадратов парциальных усилий.

Следует полагать, что по мере накопления экспериментальных данных о частотных и амплитудных составляющих поля турбулент-

ных пульсаций указанный выше расчет на невыгодные по длине здания загрузки будет дополнен (или заменен) расчетом на совместные «отклики» поступательных, крутильных и изгибных колебаний.

Внутренние парциальные усилия определяются по имеющимся в различных проектных организациях страны программам расчета плоских поперечных рам и вертикальных диафрагм жесткости на сосредоточенные горизонтальные нагрузки, приложенные в уровнях перекрытий. Эти нагрузки, соответствующие различным формам собственных колебаний здания, вычисляются по следующим формулам:

$$P_{\alpha}^{(ij)}(x_k) = \frac{q_{ij}(x_k, y_{\alpha})}{m(x)\omega_{ij}^2} C_{\alpha}^{(i)}; \quad (27.14)$$

$$\bar{P}_s^{(ij)}(x_k) = \frac{q_{ij}(x_k, y_s)}{m(x)\omega_{ij}^2} C_s^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3),$$

где $C_{\alpha}^{(i)}$, $C_s^{(i)}$ — жесткости толкающих опор рам и диафрагм.

Предполагается, что предварительно по стандартным программам решена задача об определении частот и форм собственных колебаний поперечных рам и вертикальных диафрагм жесткости с сосредоточенными массами в уровнях перекрытий, соотношение между величинами которых соответствует реальному закону $m(x)$ распределения масс по высоте здания. Тогда жесткости толкающих опор могут быть определены как произведения соответствующих сосредоточенных масс на квадрат частоты собственных колебаний рамы или диафрагмы. Эти частоты служат также и для определения приведенных изгибных жесткостей вертикальных диафрагм и приведенных сдвиговых жесткостей поперечных рам, входящих в пространственную динамическую модель здания.

Аналогично определяются нагрузки, действующие на перекрытия. Отличие заключается лишь в том, что жесткости толкающих опор определяются путем решения задачи о собственных колебаниях перекрытий как безопорной балки. Первые две частоты являются нулевыми. Им соответствуют поступательные и крутильные колебания здания, при которых перекрытие перемещается в пространстве как абсолютно жесткое тело. Жесткости толкающих опор и соответствующие нагрузки на перекрытия, естественно, определяются лишь для первой ненулевой частоты собственных колебаний. Эти нагрузки являются самоуравновешенными.

§ 28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ДИАФРАГМ

Как видно из предыдущего параграфа, определение динамических характеристик — частот и форм собственных колебаний — является составной и неотъемлемой частью динамического расчета зданий на ветровые (и сейсмические) воздействия.

Рассмотрим задачу определения частот и форм колебаний каркасного здания повышенной этажности рамно-связевой конструктивной схемы. Будем считать, что число вертикальных диафрагм больше трех и поэтому допустимо поступательные, крутильные и изгибные колебания рассматривать независимо друг от друга.

Так как число этажей велико, то сосредоточенные связи в уровнях перекрытий можно заменить распределенными по высоте этажа. В этом случае предполагается, что число перекрытий равно бесконечности, а их приведенные изгибные жесткости равны $[EI]/h$ (h — высота этажа).

В § 24 настоящей главы было получено дифференциальное уравнение вынужденных поступательных колебаний зданий с учетом диссипации энергии. Приравняв нулю правую часть уравнения (25.2), запишем дифференциальное уравнение свободных поступательных колебаний в следующем виде:

$$\frac{X_i^{IV}(x)}{X_i(x)} \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s - \frac{X_i''(x)}{X_i(x)} \sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha = \omega_i^2 Lm(x) \quad (28.1)$$

или

$$X_i^{IV}(x) \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s - X_i''(x) \sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha - \omega_i^2 Lm(x) X_i(x) = 0, \quad (28.2)$$

где $\omega_i^2 = \frac{\ddot{f}_i^*(t)}{(u + iv) \dot{f}_i^*(t)}$ — частота собственных поступательных колебаний с учетом диссипации энергии.

Окончательно уравнение (28.2) для данной задачи *

$$X_i^{IV}(x) - 2a^2 X_i''(x) - b^4 X_i(x) = 0, \quad (28.3)$$

$$\text{где } a^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{t_2} C_\alpha}{2 \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s}; \quad b^4 = \frac{L \omega_i^2 \int_0^H m(x) dx}{H \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s}.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (28.3):

$$X_i(x) = A_1 \operatorname{ch} \alpha_i x + A_2 \operatorname{sh} \alpha_i x + A_3 \cos \beta_i x + A_4 \sin \beta_i x, \quad (28.4)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; α_i, β_i — упругие динамические характеристики, представляющие собой действительную и мнимую части корней характеристического уравнения $k^4 - 2a^2 k^2 - b^4 k = 0$ и определяемые в общем случае по формулам:

$$\alpha_i = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4 + a^2}}; \quad \beta_i = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4 - a^2}};$$

* Массы здания по высоте усреднены.

Между коэффициентами α_i и β_i существует следующая зависимость:

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 = 2a^2; \quad \alpha_i = \sqrt{2a^2 + \beta_i^2}.$$

Запишем граничные условия. В уровне верха здания (при $x = 0$) изгибающий момент и поперечная сила равны нулю, т. е.

$$[X_i''(0) - 2a^2 X_i(0)] \sin \omega_i t = 0; \quad (28.5)$$

$$[X_i'''(0) - 2a^2 X_i'(0)] \sin \omega_i t = 0. \quad (28.6)$$

В уровне основания здания (при $x = H$) горизонтальное перемещение может быть определено как отношение поперечной силы $Q_i(H)$ к горизонтальной жесткости основания K_y

$$X_i(H) \sin \omega_i t = \frac{Q_i(H)}{K_y} \sin \omega_i t = \frac{\sum_{s=1}^{i_1} E_s J_s [2a^2 X_i'(H) - X_i'''(H)]}{K_y} \sin \omega_i t \quad (28.7)$$

или
$$X_i(H) = \tilde{K}_y [2a^2 X_i'(H) - X_i'''(H)], \quad (28.8)$$

где
$$\tilde{K}_y = \frac{\sum_{s=1}^{i_1} E_s J_s}{K_y}.$$

Поворот здания в грунте зависит в основном от деформации основания за счет изгибающего момента $M_i(H)$, т. е.

$$X_i'(H) \sin \omega_i t = \frac{M_i(H)}{K_\varphi} \sin \omega_i t = \frac{\sum_{s=1}^{i_1} E_s J_s [2a^2 X_i(H) - X_i''(H)]}{K_\varphi} \sin \omega_i t. \quad (28.9)$$

С учетом преобразований это выражение запишется как

$$X_i'(H) = \tilde{K}_\varphi [2a^2 X_i(H) - X_i''(H)], \quad (28.10)$$

где
$$\tilde{K}_\varphi = \frac{\sum_{s=1}^{i_1} E_s J_s}{K_\varphi};$$

K_φ — жесткость основания при повороте фундамента вертикальных диафрагм жесткости на единичный угол.

Используя граничные условия, получим частотное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i + \frac{\bar{\alpha}_i^4}{\bar{\beta}_i^3} - 2\bar{K}_y \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i^4 \bar{\beta}_i + 2 \left(\frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i} + \bar{K}_y \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i^4 \bar{\beta}_i \right) \cos \bar{\beta}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i + \\ + \left[\bar{K}_y \bar{\alpha}_i^2 (\bar{\alpha}_i^2 + \bar{\beta}_i^2) - \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i^2 \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2} \right) \right] \sin \bar{\beta}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\bar{\alpha}_i \left(\bar{\beta}_i + \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i} \right) (\bar{K}_\varphi + \bar{\alpha}_i^2 \bar{K}_y) \right] \cos \bar{\beta}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i + \\
 & + \left[\bar{\alpha}_i \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2} \right) + (\bar{\beta}_i^2 - \bar{\alpha}_i^2) \bar{K}_y \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i^3 \right] \sin \bar{\beta}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i = 0. \quad (28.11)
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i H; \quad \bar{\beta}_i = \beta_i H; \quad \bar{K}_y = \frac{\bar{K}_y}{H^3}; \quad \bar{K}_\varphi = \frac{K_\varphi}{H}.$$

Если пренебречь влиянием податливости основания при сдвиге ($K_y = \infty$) на динамические характеристики здания, то уравнение (28.11) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \bar{\beta}_i + \frac{\bar{\alpha}_i^4}{\bar{\beta}_i^3} + 2 \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i} \cos \bar{\beta}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i - \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i^2 \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2} \right) \sin \bar{\beta}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i + \\
 & + \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i \left(\bar{\beta}_i + \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i} \right) \cos \bar{\beta}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2} \right) \sin \bar{\beta}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i = 0. \quad (28.12)
 \end{aligned}$$

Уравнение (28.12) для зданий рамно-связевой системы с жестким защемлением диафрагм ($K_\varphi = \infty$) в уровне основания запишется в виде

$$\bar{\alpha}_i^4 + \bar{\beta}_i^4 + 2 \bar{\alpha}_i^2 \bar{\beta}_i^2 \cos \bar{\beta}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i (\bar{\alpha}_i^2 - \bar{\beta}_i^2) \sin \bar{\beta}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i = 0. \quad (28.13)$$

Это уравнение отличается от частотного уравнения, приведенного в работе [23], где допущена неточность при формулировке граничных условий (не учтено влияние рамного каркаса).

Для каркасных зданий связевой системы, полагая $2a^2 = 0$, а следовательно, и $\alpha_i = \beta_i$, из уравнения (28.12) найдем

$$1 + \cos \bar{\alpha}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i + \bar{K}_\varphi \bar{\alpha}_i (\cos \bar{\alpha}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i - \sin \bar{\alpha}_i \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i) = 0. \quad (28.14)$$

Уравнение (28.14) впервые получено Э. Е. Сигаловым [23]. Формы колебаний определяются по формуле (28.4). Входящие в нее постоянные $A_1 - A_4$ соответственно равны

$$\begin{aligned}
 A_3 &= 1; \quad A_1 = \frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2}; \quad A_2 = A_4 \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\beta}_i}; \\
 A_4 &= \frac{\frac{\bar{\alpha}_i^2}{\bar{\beta}_i^2} \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i + \cos \bar{\beta}_i + \bar{K}_y \bar{\alpha}_i^2 (\bar{\beta}_i \sin \bar{\beta}_i + \bar{\alpha}_i \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i)}{\frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\beta}_i} \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i + \sin \bar{\beta}_i + \bar{K}_y \bar{\alpha}_i^2 (\cos \bar{\beta}_i - \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i)}. \quad (28.15)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть получены частотные уравнения для крутильных и изгибных колебаний.

Учитывая аналогию дифференциальных уравнений (28.3), (25.8) и (25.12) при определении частот и форм собственных колебаний зда-

ния для определения форм колебаний можно воспользоваться уравнением (28.11) и формулами (28.4), (28.15).

Таким образом, уравнение (28.11) может быть использовано для определения частот поступательных, крутильных и изгибных колебаний.

Задаваясь различными значениями $2a^2$, характеризующими соотношение между жесткостью рам и диафрагм, последовательными попытками можно установить также значения b^4 , для которых уравнение (28.11) удовлетворяется. Тогда частоты собственных колебаний определяются по сравнительно простым формулам:

для поступательных колебаний

$$\omega_{i1} = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s b_i^4 H}{L \int_0^H m(x) dx}}; \quad (28.16)$$

для крутильных

$$\omega_{i2} = \sqrt{\frac{Fl \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s \left(\frac{d_s}{l} - 1 \right) (d_s - l) b_i^4 H}{LI_p \int_0^H m(x) dx}}; \quad (28.17)$$

для изгибных

$$\omega_{i3} = \sqrt{\frac{\left\{ \frac{L[EI]}{h} \left(\frac{\lambda_l}{l} \right)^4 + \sum_{s=1}^{t_1} E_s I_s b_i^4 \right\} H}{L \int_0^H m(x) dx}}. \quad (28.18)$$

§ 29. О ДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ РАМНОЙ И РАМНО-СВЯЗЕВОЙ КОНСТРУКТИВНЫХ СХЕМ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ДИАФРАГМ

Полученные в § 27 формулы (27.8) и (27.9) для определения динамических ветровых нагрузок распространяются также на здания рамной конструктивной и рамно-связевой схем с малым числом диафрагм. Дело в том, что указанные формулы выведены путем представления решений дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в виде ряда по формам собственных колебаний. В этом случае характер самих дифференциальных уравнений существенно значения не имеет: все особенности конструктивной схемы здания автоматически учитываются такими динамическими характеристиками здания, как частоты (периоды), формы собственных колебаний и неупругие сопротивления. Коэффициенты $\eta(x)$ и $\tau(y)$, входящие в формулу для динамических ветровых (инерционных) нагрузок,

определяются по формам собственных колебаний, а нормативный динамический коэффициент ξ — по частотам (периодам) и характеристикам неупругого сопротивления. Характеристики неупругого сопротивления выбираются на основании данных натуральных испытаний, а частоты и формы собственных колебаний определяются расчетом.

В нормах характеристики неупругих сопротивлений учитываются весьма приближенно, исходя лишь из вида материала здания (бетон, металл, дерево).

Для зданий рамной конструктивной схемы пространственный расчет собственных колебаний затруднений не представляет и может быть выполнен по готовым формулам при использовании соответствующих методов и формул обычных (по плоской расчетной схеме) расчетов на колебания.

Для зданий рамно-связевой конструктивной схемы методы расчета собственных колебаний являются более сложными и требуют в общем случае применения ЭВМ. При использовании гипотезы подобия форм колебаний всех вертикальных элементов здания эти методы настолько упрощаются, что могут выполняться на обычных счетных (клавишных) машинах *.