

УЧЕТ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ В СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАРКАСА И НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ ПО ВЫСОТЕ И ПЕРИМЕТРУ ЗДАНИЯ**§ 16. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

В предыдущей главе излагался метод расчета каркасных зданий рамно-связевой системы с постоянными по высоте геометрическими и жесткостными характеристиками поперечных рам и вертикальных диафрагм жесткости. При этом профиль ветра принимался плоским, т. е. изменяющимся по трапецевидному закону по высоте здания и прямоугольному — по его длине.

Однако на практике часто встречаются здания, у которых отмеченные выше ограничения как для основных несущих вертикальных элементов, так и для ветровой нагрузки не имеют места. Это, в основном, здания повышенной этажности с числом этажей 15—25 и более. Известны также случаи, когда по ряду причин проектировщики вынуждены изменять (увеличивать) высоту первого этажа. Иногда же в расчетной схеме роль первого этажа выполняет так называемый технологический этаж с высотой меньшей высоты других этажей. К тому же, имеющиеся данные (см. главу I) показывают, что протяженные в плане здания (при $L = 50 \div 70$ м) вносят существенные изменения в характер профиля ветра по длине здания.

Таким образом, имеется практическая необходимость в разработке метода расчета, в котором бы учитывались отмеченные выше особенности в конструкции здания и распределения ветровой нагрузки.

Обобщим разработанный в предыдущей главе метод для учета нерегулярности в структуре поперечных рам каркаса и вертикальных диафрагм.

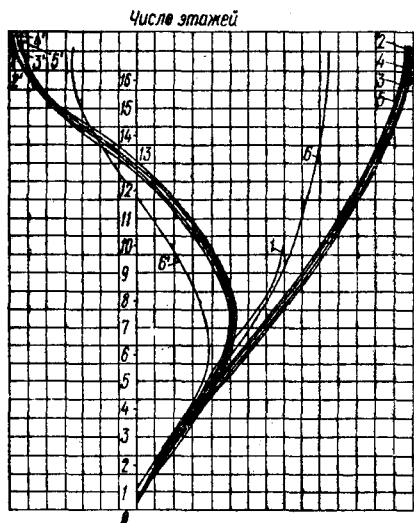
Для метода, разработанного в предыдущей главе, в качестве расчетной модели для поперечной рамы принят сдвиговой стержень, приведенные сдвиговые жесткостные характеристики которого совпадают со сдвиговыми характеристиками типового этажа поперечной рамы. Очевидно, эти ограничения можно снять, если в качестве возможных перемещений в единичных состояниях принять формы собственных колебаний не сдвигового стержня, а поперечной рамы, имеющей нерегулярную структуру по высоте здания.

В необходимости такой замены можно убедиться при рассмотрении рис. I.12, где показаны формы колебаний поперечных рам. Последние были получены точным и приближенным способами.

В первом случае матрица единичных перемещений определялась путем обращения матрицы единичных реакций, вычисленных последовательными приближениями, во втором — по приближенным формулам как для сдвигового стержня с приведенными жесткостными характеристиками. Собственные числа и формы колебаний определялись по стандартным программам на ЭВМ. Вычисления были

выполнены на машине БЭСМ-2М для заданных и усредненных масс, сосредоточенных в уровнях междуэтажных перекрытий.

Формы смещений ярусов квазистатических моделей поперечных нерегулярных рам, вычисленные точным способом для заданных масс, представлены кривыми 2, 2', а для усредненных — кривыми 3, 3'. Результаты вычислений приближенным способом представлены соответственно кривыми 4, 4' и 5, 5'. Как видно из рис. 1.12, закон распределения масс и способ определения единичных перемещений практически не отражается на формах колебаний. Это же относится и к собственным числам, пропорциональным жесткостям толкающих опор.



Исследователями установлено, что формы смещений таких сложных статически неопределимых стержневых систем, какими являются поперечные рамы, прежде всего сдвиговые, как для составного консольного стержня. Однако с увеличением этажности,

исследователями установлено, что формы смещений таких сложных статически неопределимых стержневых систем, какими являются поперечные рамы, прежде всего сдвиговые, как для составного консольного стержня. Однако с увеличением этажности,

Рис. 1.12. Формы колебаний поперечных рам:

1 — безузловая 10-этажной рамы; 2—5 — безузловые 17-этажной; 2'—5' — одноузловые; 6—6' — соответственно безузловая и одноузловая для рамы, моделированной условным сдвиговым стержнем.

например выше десяти (см. кривые 1, 6 и 2—5), все больше начинают проявляться изгибные формы. Следовательно, в таком случае необходимо отказаться от упомянутых выше упрощений в расчетных моделях поперечных рам.

При новом подходе связи, соединяющие неполный пространственный каркас и диафрагмы жесткости, примем дискретными. Поэтому задачу будем решать в матричной форме, которая к тому же наиболее приспособлена для использования ЭВМ. Очевидно, что разрешающие уравнения разрабатываемого (уточненного) метода по своей структуре будут совпадать с уравнениями (9.1) предыдущей главы, поскольку основные идеи сохраняются теми же. Отличие заключается в формировании матриц обобщенных перемещений вертикальных диафрагм жесткости, неполного пространственного каркаса и грузовых членов.

Не представляет труда при таком подходе учесть возможность изменения по этажам геометрических и жесткостных характеристик вертикальных диафрагм. Однако метод не охватывает встречающиеся на практике случаи, когда часть поперечных рам каркаса здания имеет иные геометрические и жесткостные характеристики. Следовательно, метод применим к расчету тех зданий, в каркасе которых все поперечные рамы одинаковы (высоты этажей, а также

жесткостные характеристики рам по высоте могут быть произвольными).

Предполагается возможным, используя принцип независимости действия сил, учесть пространственный характер распределения ветровой нагрузки. Для этого горизонтальный профиль ветровой нагрузки разбивается на несколько участков. Количество участков разбиения зависит от степени неравномерности этого профиля. При таком подходе всю ветровую нагрузку можно представить в виде совокупности дискретных сил, приведенных к уровням перекрытий.

§ 17. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДИАФРАГМ ЖЕСТКОСТИ

Предположим, что задача о собственных горизонтальных колебаниях поперечной рамы решена (имеются стандартные программы для ЭВМ). Тогда собственные векторы \vec{X}_i и соответствующие им собственные числа $C^{(i)}$ (жесткости толкающих опор), равные произведению сосредоточенных масс на квадраты собственных колебаний ω_i^2 , можно считать известными. Величины сосредоточенных масс M могут быть произвольными. В расчетах их удобно принимать равными единице.

В единичных состояниях вертикальные диафрагмы и неполный каркас загрузим единичными обобщенными силами $r_s^{(i)} = 1$ (см. рис. 1.11). Это значит, что каждая вертикальная диафрагма с номером s и неполный пространственный каркас загружаются в уровне перекрытий этажей сосредоточенными силами $X_i(x_k)$, величины которых равны координатам соответствующего собственного вектора.

Единичные обобщенные перемещения, входящие в канонические уравнения метода сил, вычисляются как работы единичных обобщенных сил на соответствующих им обобщенных перемещениях.

Определим работу, совершаемую обобщенной силой $r_s^{(i)} = 1$ на перемещениях диафрагмы с номером s , вызываемых этой силой. Горизонтальные перемещения $v_s^{(i)}(x_k)$ диафрагмы, загруженной в уровнях перекрытий силами $X_i(x_k)$, равны сумме произведений ее единичных перемещений $\delta_{kp(s)}$ на эти силы

$$v_s^{(i)}(x_k) = \sum_{p=1}^n \delta_{kp(s)} X_i(x_p). \quad (17.1)$$

Работы обобщенных сил $r_s^{(i)} = 1$, $r_s^{(m)} = 1$ на перемещениях диафрагмы с номером p равны:

$$a_s^{(ii)} = \sum_{k=1}^n v_s^{(i)}(x_k) X_i(x_k); \quad (17.2)$$

$$a_s^{(im)} = \sum_{k=1}^n v_s^{(i)}(x_k) X_m(x_k). \quad (17.3)$$

Подставим $v_s^{(i)}(x_k)$, определяемые выражением (17.1), в уравнения (17.2) и (17.3). Тогда

$$a_s^{(ii)} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \delta_{kp(s)} X_l(x_p) X_l(x_k); \quad (17.4)$$

$$a_s^{(im)} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \delta_{kp(s)} X_l(x_p) X_m(x_k) \quad (17.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, что работы обобщенных сил, приложенных к диафрагме с номером p , на перемещениях, вызываемых остальными обобщенными силами (приложенными к другим диафрагмам), равны нулю.

Формулы (17.4) и (17.5) могут быть представлены в следующем матричном виде

$$a_s^{(ii)} = \vec{X}'_i D_s \vec{X}_i; \quad (17.6)$$

$$a_s^{(im)} = \vec{X}'_i D_s \vec{X}_m \quad (17.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n),$$

где $\vec{X}'_i = \|X_i(x_1) X_i(x_2) \dots X_i(x_n)\|$;

$$\vec{X}_l = \begin{vmatrix} X_l(x_1) \\ X_l(x_2) \\ \dots \\ X_l(x_n) \end{vmatrix}; \quad \vec{X}_m = \begin{vmatrix} X_m(x_1) \\ X_m(x_2) \\ \dots \\ X_m(x_n) \end{vmatrix}; \quad D_s = \begin{vmatrix} \delta_{11(s)} & \delta_{12(s)} & \dots & \delta_{1n(s)} \\ \delta_{21(s)} & \delta_{22(s)} & \dots & \delta_{2n(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1(s)} & \delta_{n2(s)} & \dots & \delta_{nn(s)} \end{vmatrix}.$$

Матрица обобщенных перемещений (работ) вертикальных диафрагм жесткости имеет квазидиагональную структуру

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & A_s & \\ & & & \dots \\ & & & & A_t \end{vmatrix}, \quad (17.8)$$

где t_1 — число вертикальных диафрагм жесткости.

Квазиэлементы A_p определяются по следующей формуле, являющейся обобщением формул (17.6) и (17.7):

$$A_s = \begin{vmatrix} a_s^{(11)} & a_s^{(12)} & \dots & a_s^{(1n)} \\ a_s^{(21)} & a_s^{(22)} & \dots & a_s^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s^{(n1)} & a_s^{(n2)} & \dots & a_s^{(nn)} \end{vmatrix} = X' D_s X, \quad (17.9)$$

где

$$X = \begin{vmatrix} X_1(x_1) & X_2(x_1) & \dots & X_n(x_1) \\ X_1(x_2) & X_2(x_2) & \dots & X_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_n) & X_2(x_n) & \dots & X_n(x_n) \end{vmatrix} \quad \text{— ортогональная симметричная матрица, столбцы которой являются собственными векторами поперечных рам.}$$

Матрицы единичных перемещений D_s , вертикальных диафрагм сплошного сечения могут быть получены путем перемножения трех матриц *

$$D_s = \bar{M}' B_s \bar{M}, \quad (17.10)$$

где

$$\bar{M}_{(n+1)n} = \begin{vmatrix} h_1 & h_1 + h_2 & h_1 + h_2 + h_3 & \dots & h_1 + h_2 + \dots + h_n \\ 0 & h_2 & h_2 + h_3 & \dots & h_2 + \dots + h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} -$$

матрица изгибающих моментов вертикальных диафрагм от единичных сил, приложенных в уровнях перекрытий;

$$B_{(n+1)(n+1)} = \frac{h_1}{6E_{1(s)}I_{1(s)}} = \begin{vmatrix} 2 + \mu_{1(s)} + K_{\varphi(s)}^{(p)} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \mu_{1(s)} & 2 + \mu_{1(s)} + \rho_{2(s)}(2 + \mu_{2(s)}) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \rho_{2(s)}(1 - \mu_{2(s)}) & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \rho_{n(s)}(1 - \mu_{n(s)}) & \rho_{n(s)}(2 + \mu_{n(s)}) & \dots \end{vmatrix}$$

— матрица податливости вертикальных диафрагм, учитывающая деформации изгиба, сдвига и поворот основания;

$$\mu_{k(s)} = \frac{6E_{1(s)}I_{1(s)}}{h_1 h_k G_{1(s)} F_{1(s)}}; \quad \rho_{k(s)} = \frac{h_1 E_{k(s)} I_{k(s)}}{h_k E_{1(s)} I_{1(s)}}; \quad K_{\varphi(s)}^{(p)} = \frac{6E_{1(s)} I_{1(s)}}{h_1 C_{\varphi(s)}};$$

h_1, h_k — высоты первого и k -го этажей; $E_{k(s)} I_{k(s)}, G_{k(s)} E_{k(s)}$ — изгибная и сдвиговая жесткости диафрагм в уровне k -го перекрытия; $C_{\varphi(s)}$ — угловая жесткость основания диафрагмы.

Подставляя (17.10) в (17.9), получим

$$A_s = X' \bar{M}' B_s \bar{M} X. \quad (17.11)$$

Если же обобщенные неизвестные связывать не с номером диафрагмы, а с номером форм изгиба (форм колебаний) квазистатической модели поперечных рам, то матрица A станет полной и будет иметь размер $n \times n$

$$A_{(n \times n)} = \begin{vmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} & \dots & A^{(1n)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} & \dots & A^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(n1)} & A^{(n2)} & \dots & A^{(nn)} \end{vmatrix}. \quad (17.12)$$

* Для вертикальных диафрагм с проемами элементы матрицы могут быть определены по формулам (12.6) и (12.7).

Теперь диагональную структуру приобретут квазиэлементы матрицы A , имеющие размер $t_1 \times t_1$:

$$A^{(im)} = \begin{pmatrix} a_1^{(im)} & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & a_s^{(im)} & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & a_{t_1}^{(im)} \end{pmatrix}. \quad (17.13)$$

Элементы матрицы $A^{(im)}$ определяются по формуле

$$a_s^{(im)} = \vec{X}'_i D_s \vec{X}_m. \quad (17.14)$$

Для сплошных вертикальных диафрагм жесткости формула (17.14), при учете (17.10), преобразуется к виду

$$a_s^{(im)} = \vec{X}'_i \bar{M}' B_s \bar{M} \vec{X}_m. \quad (17.15)$$

§ 18. МАТРИЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ЕДИНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЕРЕКРЫТИЙ И ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НЕПОЛНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАРКАСА

Единичные перемещения перекрытий определяются по формуле

$$\delta_{sp}^{(i)} = \frac{1}{C_1^{(i)t_2}} + \frac{3(1 - 2\bar{y}_s)(1 - 2\bar{y}_p)}{\frac{FC_1^{(i)}}{I_p} \sum_{r=1}^{t_2} a_r^2} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{4L^3}{\lambda_j^4 [EI]} [V_j(\bar{y}_s)V_j(\bar{y}_p) + 0,5v_j \bar{V}_j(\bar{y}_s)\bar{V}_j(\bar{y}_p)].$$

Запишем эту формулу в следующем виде:

$$\delta_{sp}^{(i)} = \sum_{j=0}^{n_1} \kappa_j^{(i)} V_j(\bar{y}_s)V_j(\bar{y}_p) + \sum_{j=2}^{n_1} 0,5v_j \kappa_j^{(i)} \bar{V}_j(\bar{y}_s)\bar{V}_j(\bar{y}_p), \quad (18.1)$$

$$\text{где } \kappa_0^{(i)} = \frac{1}{C_1^{(i)t_2}}; \quad \kappa_1^{(i)} = \frac{3}{\frac{FC_1^{(i)}}{I_p} \sum_{r=1}^{t_2} a_r^2}; \quad \kappa_j^{(i)} = \frac{4L^3}{\lambda_j^4 [EI]} \text{ при } j > 1;$$

$$\lambda_2 = 4,73; \quad \lambda_3 = 7,8532; \quad \lambda_4 = 10,996; \quad \lambda_5 = 14,137;$$

$$\lambda_6 = 17,279; \quad V_0(\bar{y}) = 1; \quad V_1(\bar{y}) = 1 - 2\bar{y};$$

$$V_j(\bar{y}) = S(\lambda_j \bar{y}) - \frac{V\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)}{S\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)} T(\lambda_j \bar{y}) \quad \text{при } j = 2, 4, \dots;$$

$$V_j(\bar{y}) = S(\lambda_j \bar{y}) - \frac{S\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)}{T\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)} T(\lambda_j \bar{y}) \quad \text{при } j = 3, 5, \dots;$$

$$\bar{V}_i(\bar{y}) = \cos \bar{\lambda}_i \bar{y} \quad \text{при } j = 2, 3, \dots;$$

$$\bar{\lambda}_2 = 6,283; \bar{\lambda}_3 = 9,425; \bar{\lambda}_4 = 12,566; \bar{\lambda}_5 = 15,708; \bar{\lambda}_6 = 18,850;$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \nu_j = \frac{\lambda_j^4}{\bar{\lambda}_j^2} \frac{[EI]}{L^2 [GF]}.$$

Функции $S(\lambda_j \bar{y})$, $V(\lambda_j \bar{y})$, $T(\lambda_j \bar{y})$ и таблицы для них приведены в работе [1]. Формулу (18.1) можно представить в виде произведения матриц

$$\delta_{sp}^{(i)} = \vec{V}'(\bar{y}_s) \kappa^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p) + \vec{V}'(\bar{y}_s) \bar{\kappa}^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p), \quad (18.2)$$

где

$$\vec{V}(\bar{y}_s) = \begin{vmatrix} V_0(\bar{y}_s) \\ V_1(\bar{y}_s) \\ \vdots \\ V_{n_1}(\bar{y}_s) \end{vmatrix}; \quad \vec{V}(\bar{y}_s) = \begin{vmatrix} \bar{V}_2(\bar{y}_s) \\ \bar{V}_3(\bar{y}_s) \\ \vdots \\ \bar{V}_{n_1}(\bar{y}_s) \end{vmatrix}; \quad \kappa^{(i)} = \begin{vmatrix} \kappa_0^{(i)} \\ \kappa_1^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_{n_1}^{(i)} \end{vmatrix},$$

$$\bar{\kappa}^{(i)} = \begin{vmatrix} \bar{\kappa}_2^{(i)} \\ \bar{\kappa}_3^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\kappa}_{n_1}^{(i)} \end{vmatrix}.$$

Формула (18.2) является матричной формулой единичных перемещений перекрытий на упругом основании жесткостью $t_2 C_1^{(i)}/L$. Перейдем теперь к определению единичных перемещений неполного пространственного каркаса. Поскольку пространственный каркас расчленяется на плоские элементы только при воздействии на него групповыми силами, являющимися собственными векторами поперечных рам, то, следовательно, речь будет идти об определении обобщенных (групповых) единичных перемещений неполного пространственного каркаса и о составлении матрицы этих перемещений.

Во второй главе была установлена количественная связь (формула 8.12) между обобщенными единичными перемещениями неполного пространственного каркаса и единичными (обычными, не групповыми) перемещениями перекрытий. Перепишем формулу (8.12) в матричном виде

$$b_{sp}^{(im)} = \delta_{sp}^{(i)} \| X_i(x_1) \quad X_i(x_2) \quad \dots \quad X_i(x_n) \| \cdot \begin{Bmatrix} X_m(x_1) \\ X_m(x_2) \\ \vdots \\ X_m(x_n) \end{Bmatrix} = \\ = \delta_{sp}^{(i)} \vec{X}_i' \vec{X}_m. \quad (18.3)$$

Для обобщенных неизвестных

$$\vec{r}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1^{(1)} \\ \bar{r}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{r}_{t_1}^{(1)} \end{Bmatrix}; \quad \dots \quad \vec{r}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1^{(i)} \\ \bar{r}_2^{(i)} \\ \vdots \\ \bar{r}_{t_i}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad \dots \quad \vec{r}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1^{(m)} \\ \bar{r}_2^{(m)} \\ \vdots \\ \bar{r}_{t_m}^{(m)} \end{Bmatrix}; \\ \dots \quad \vec{r}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_1^{(n)} \\ \bar{r}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{r}_{t_n}^{(n)} \end{Bmatrix}.$$

Матрица обобщенных перемещений $B^{(im)}$ (для состояний im) будет иметь вид

$$B^{(im)} = \begin{Bmatrix} \delta_{11}^{(i)} & \delta_{12}^{(i)} & \dots & \delta_{1t_1}^{(i)} \\ \delta_{21}^{(i)} & \delta_{22}^{(i)} & \dots & \delta_{2t_1}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{t_1 1}^{(i)} & \delta_{t_1 2}^{(i)} & \dots & \delta_{t_1 t_1}^{(i)} \end{Bmatrix} \cdot \vec{X}_i' \vec{X}_m,$$

где i, m — номера форм изгиба (форм колебаний) квазистатических моделей поперечных рам; n — число этажей; t_1 — число диафрагм. Обобщая формулу (18.2), получим

$$B^{(im)} = (V' \kappa^{(i)} V + \bar{V}' \bar{\kappa}^{(i)} \bar{V}) \vec{X}_i' \vec{X}_m, \quad (18.4)$$

где

$$V = \begin{Bmatrix} V_0(y_1) & V_0(y_2) & \dots & V_0(y_{t_1}) \\ V_1(y_1) & V_1(y_2) & \dots & V_1(y_{t_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n_1}(y_1) & V_{n_1}(y_2) & \dots & V_{n_1}(y_{t_1}) \end{Bmatrix}; \\ \bar{V} = \begin{Bmatrix} \bar{V}_2(y_1) & \bar{V}_2(y_2) & \dots & \bar{V}_2(y_{t_1}) \\ \bar{V}_3(y_1) & \bar{V}_3(y_2) & \dots & \bar{V}_3(y_{t_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{V}_{n_1}(y_1) & \bar{V}_{n_1}(y_2) & \dots & \bar{V}_{n_1}(y_{t_1}) \end{Bmatrix}.$$

Полная матрица обобщенных перемещений имеет порядок

$$B = \begin{vmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} & \dots & B^{(1n)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} & \dots & B^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^{(n1)} & B^{(n2)} & \dots & B^{(nn)} \end{vmatrix}, \quad (18.5)$$

где $B^{(im)}$ — квазиэлементы матрицы, определяемые по формуле (18.4).

Учитывая ортогональность векторов \vec{X}_l и \vec{X}_m , получим

$$B = \begin{vmatrix} B^{(11)} & & & \\ & B^{(22)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^{(nn)} \end{vmatrix}. \quad (18.6)$$

Как видно из (18.6), матрица B имеет квазидиагональную структуру и порядок $n \times n$. Квазиэлементы $B^{(ii)}$ этой матрицы имеют порядок $t_i \times t_i$ и определяются по формуле

$$B^{(ii)} = \begin{vmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \dots & b_{1t_i}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \dots & b_{2t_i}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{t_i 1}^{(i)} & b_{t_i 2}^{(i)} & \dots & b_{t_i t_i}^{(i)} \end{vmatrix} = V' \kappa^{(i)} V + \bar{V}' \bar{\kappa}^{(i)} \bar{V}. \quad (18.7)$$

При иной группировке обобщенных неизвестных

$$\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} r_1^{(1)} \\ r_1^{(2)} \\ \vdots \\ r_1^{(n)} \end{vmatrix}; \dots; \vec{r}_s = \begin{vmatrix} r_s^{(1)} \\ r_s^{(2)} \\ \vdots \\ r_s^{(n)} \end{vmatrix}; \dots; \vec{r}_p = \begin{vmatrix} r_p^{(1)} \\ r_p^{(2)} \\ \vdots \\ r_p^{(n)} \end{vmatrix}; \dots; \vec{r}_{t_i} = \begin{vmatrix} r_{t_i}^{(1)} \\ r_{t_i}^{(2)} \\ \vdots \\ r_{t_i}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Матрица B , имеющая порядок $t_i \times t_i$, утрачивает диагональную структуру.

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t_i} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{t_i 1} & B_{t_i 2} & \dots & B_{t_i t_i} \end{vmatrix}. \quad (18.8)$$

Однако диагональную структуру теперь приобретают ее квази-элементы, имеющие порядок $n \times n$:

$$B_{sp} = \begin{pmatrix} b_{sp}^{(11)} & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & b_{sp}^{(22)} & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & b_{sp}^{(nn)} \end{pmatrix}. \quad (18.9)$$

Подставим в формулу (18.3) выражение для $\delta_{sp}^{(i)}$ из (18.2). Учитывая ортогональность и ортонормированность векторов \vec{X}_i и \vec{X}_m , получим

$$b_{sp}^{(ii)} = \vec{V}'(\bar{y}_s) \kappa^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p) + \vec{V}'(\bar{y}_s) \bar{\kappa}^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p). \quad (18.10)$$

§ 19. МАТРИЦА-СТОЛБЕЦ ОБОБЩЕННЫХ ГРУЗОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим вначале плоский профиль ветра — трапециевидный по высоте и прямоугольный по длине здания. Общий случай пространственного распределения ветровой нагрузки будет рассмотрен в § 22 данной главы. Очевидно, при нагружении здания нагрузкой такого вида неполный пространственный каркас, имеющий регулярную структуру на протяжении всего здания, деформируется одинаково по всей своей длине. Следовательно, перекрытия не деформируются и ведут себя как абсолютно жесткие диски.

Напомним, что обобщенные грузовые члены $b_{qp}^{(i)}$ можно определить как работу ветровых нагрузок на перемещениях неполного пространственного каркаса от воздействия единичных обобщенных сил $r_p^{(i)} = 1$ (p — номер вертикальной диафрагмы, i — номер гармоники). Ранее (глава II) было показано, что величины $b_{qp}^{(i)}$ от номера диафрагмы p не зависят. Очевидно также, что перемещения неполного пространственного каркаса от ветровой нагрузки не изменятся, если распределенные вдоль перекрытия нагрузки сосредоточить в центре, а все поперечные рамы каркаса заменить одной расчетной, эквивалентной по жесткости*.

Горизонтальные перемещения расчетной рамы, нагруженной в уровнях перекрытий силами $X_i(x_k)$, равны

$$V^{(i)}(x_k) = \sum_{s=1}^n f_s(x_k) X_i(x_s), \quad (19.1)$$

где $f(x_k)$ — единичные перемещения расчетной рамы.

* Погонные жесткости стоек и ригелей такой расчетной рамы равны сумме соответствующих погонных жесткостей всех поперечных рам каркаса.

Работа сосредоточенных ветровых нагрузок $Q(x_k)$ на перемещениях $V^{(i)}(x_k)$ равна

$$b_q^{(i)} = \sum_{k=1}^n V^{(i)}(x_k) Q(x_k). \quad (19.2)$$

Подставим $V^{(i)}(x_k)$, определяемое выражением (19.1), в уравнение (19.2), тогда

$$b_q^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n f_s(x_k) X_s(x_k) Q(x_k). \quad (19.3)$$

Формула (19.3) может быть представлена в следующем матричном виде

$$b_q^{(i)} = \vec{X}_i^{(i)}(x_k) D \vec{Q}(x_k), \quad (19.4)$$

где $D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}; \quad \vec{Q} = \begin{vmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ \vdots \\ Q(x_n) \end{vmatrix}.$

Векторы грузовых коэффициентов можно получить обобщением формулы (19.4), т. е.

$$\vec{b}_q = \begin{vmatrix} b_q^{(1)} \\ b_q^{(2)} \\ \vdots \\ b_q^{(n)} \end{vmatrix} = X' D \vec{Q}. \quad (19.5)$$

Поскольку это справедливо для всех диафрагм, то полная матрица-столбец грузовых коэффициентов разрешающих уравнений запишется как

$$\vec{B}_q = \begin{vmatrix} \vec{b}_q \\ \vec{b}_q \\ \vdots \\ \vec{b}_q \end{vmatrix}. \quad (19.6)$$

Если же в качестве обобщенных неизвестных принять вектора $\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(i)}, \dots, \vec{r}^{(n)}$, то соответствующая им матрица-столбец грузовых коэффициентов будет иметь вид

$$\vec{B}_q = \begin{vmatrix} \vec{b}_q^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{b}_q^{(i)} \\ \vdots \\ \vec{b}_q^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (19.7)$$

В отличие от (19.5) все элементы квазиматрицы $\vec{b}_a^{(i)}$ одинаковы:

$$\vec{b}_a^{(i)} = \begin{pmatrix} b_a^{(i)} \\ b_a^{(i)} \\ \vdots \\ b_a^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (19.8)$$

Определяются они путем перемножения матрицы-строки на матрицу-столбец:

$$b_a^{(i)} = \vec{X}_i D \vec{Q}. \quad (19.9)$$

§ 20. ДВЕ ФОРМЫ МАТРИЧНЫХ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗДАНИЯ, РАССМАТРИВАЕМОГО КАК ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА

В предыдущих параграфах были получены формулы для формирования матриц коэффициентов разрешающих уравнений и их грузовых членов для двух вариантов выбора обобщенных неизвестных

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_s \dots \vec{r}_{t_1};$$

$$\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)} \dots \vec{r}^{(i)} \dots \vec{r}^{(n)}.$$

Запишем разрешающие уравнения, соответствующие этим двум вариантам обобщенных неизвестных, в матричном виде таким образом, чтобы была видна их структура:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_s \\ \dots \\ A_{t_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t_1} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{st_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{t_1 1} & B_{t_1 2} & \dots & B_{t_1 t_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_s \\ \vdots \\ \vec{r}_{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_a \\ \vec{b}_a \\ \vdots \\ \vec{b}_a \\ \vdots \\ \vec{b}_a \end{pmatrix}; \quad (20.1)$$

$$\begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} & \dots & A^{(1n)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} & \dots & A^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(i1)} & A^{(i2)} & \dots & A^{(in)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(n1)} & A^{(n2)} & \dots & A^{(nn)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{(11)} \\ B^{(22)} \\ \dots \\ B^{(ii)} \\ \dots \\ B^{(nn)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \vec{r}^{(1)} \\ \vec{r}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{(l)} \\ \vdots \\ \vec{r}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_q^{(1)} \\ \vec{b}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{b}_q^{(l)} \\ \vdots \\ \vec{b}_q^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (20.2)$$

где

$$\vec{r}_s = \begin{pmatrix} r_s^{(1)} \\ r_s^{(2)} \\ \vdots \\ r_s^{(n)} \end{pmatrix}; \quad \vec{r}^{(l)} = \begin{pmatrix} r_1^{(l)} \\ r_2^{(l)} \\ \vdots \\ r_{t_1}^{(l)} \end{pmatrix};$$

$$A_s = X'D_sX; \quad X = \|\vec{X}_1 \vec{X}_2 \dots \vec{X}_n\|;$$

$$B_{sp} = \begin{pmatrix} b_{sp}^{(11)} \\ b_{sp}^{(22)} \\ \vdots \\ b_{sp}^{(ll)} \\ \vdots \\ b_{sp}^{(nn)} \end{pmatrix};$$

$$b_{sp}^{(ii)} = \vec{V}'(\bar{y}_s) \kappa^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p) + \vec{V}'(\bar{y}_s) \bar{\kappa}^{(i)} \vec{V}(\bar{y}_p);$$

$$\vec{b}_q = X'D\vec{Q};$$

$$A^{(im)} = \begin{pmatrix} a_1^{(im)} \\ a_2^{(im)} \\ \vdots \\ a_s^{(im)} \\ \vdots \\ a_{t_1}^{(im)} \end{pmatrix};$$

$$a_s^{(im)} = \vec{X}'_i D_s \vec{X}_m;$$

$$B^{(ii)} = V' \kappa^{(i)} V + \vec{V}' \bar{\kappa}^{(i)} \vec{V};$$

$$\vec{b}_q^{(i)} = \begin{pmatrix} b_q^{(i)} \\ b_q^{(i)} \\ \vdots \\ b_q^{(i)} \end{pmatrix};$$

$$b_q^{(i)} = \vec{X}_i' D \vec{Q}.$$

Интересно отметить, что системы разрешающих уравнений (20.1) и (20.2) и их коэффициенты обладают свойством двойственности: неполный пространственный каркас в единичных состояниях «ведет себя» как совокупность отдельных, не связанных между собой горизонтальных диафрагм-перекрытий на упругом основании (аналогично вертикальным диафрагмам жесткости).

§ 21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК, ПРИХОДЯЩИХСЯ НА ВЕРТИКАЛЬНЫЕ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЗДАНИЯ

Решение матричного разрешающего уравнения (20.1) можно получить с помощью обратной матрицы $(A + B)^{-1}$:

$$\|\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_s \dots \vec{r}_t\|' = (A + B)^{-1} \|\vec{b}_q \vec{b}_q \dots \vec{b}_q \dots \vec{b}_q\|'. \quad (21.1)$$

Обобщенные неизвестные $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_s \dots \vec{r}_t$ связаны с $\vec{R}_1, \vec{R}_2 \dots \vec{R}_s \dots \vec{R}_t$ — силами взаимодействия между неполным пространственным каркасом и вертикальными диафрагмами жесткости — следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= X \vec{r}_1; \quad \vec{R}_2 = X \vec{r}_2; \quad \dots \\ \vec{R}_s &= X \vec{r}_s; \quad \dots \quad R_t = X \vec{r}_t. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Зависимости (21.2) можно представить в виде одной матричной формулы

$$\|\vec{R}_1, \vec{R}_2 \dots \vec{R}_s \dots \vec{R}_t\|' = \|\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_s \dots \vec{r}_t\|' X'. \quad (21.3)$$

Вектор-столбец \vec{R}_s представляет расчетные силы для вертикальной диафрагмы жесткости с номером s .

Перейдем к определению $R(x_k, y_\alpha)$ — сил взаимодействия между элементами неполного пространственного каркаса, т. е. между рамами и перекрытиями.

Поскольку в единичных состояниях i неполный пространственный каркас распадается (расчленяется) на поперечные рамы и перекрытия с упругими опорами $(-C^{(i)})$ и $(+C^{(i)})$, то силы $R(x_k, y_\alpha)$ можно получить используя принцип суперпозиции с помощью единичных

перемещений перекрытий $\delta_{sp}^{(i)}$:

$$R(x_k, y_\alpha) = r_1^{(1)} X_1(x_k) \delta_{\alpha 1}^{(1)} C^{(1)} + \dots + r_1^{(n)} X_n(x_k) \delta_{\alpha 1}^{(n)} C^{(n)} + \\ + r_2^{(1)} X_1(x_k) \delta_{\alpha 2}^{(1)} C^{(1)} + \dots + r_2^{(n)} X_n(x_k) \delta_{\alpha 2}^{(n)} C^{(n)} + \\ + \dots + r_{i_1}^{(1)} X_1(x_k) \delta_{\alpha i_1}^{(1)} C^{(1)} + \dots + r_{i_1}^{(n)} X_n(x_k) \delta_{\alpha i_1}^{(n)} C^{(n)}. \quad (21.4)$$

В матричной форме формула (21.4) запишется так:

$$R(x_k, y_\alpha) = \| X_1(x_k) X_2(x_k) \dots X_n(x_k) \| \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 1}^{(1)} C^{(1)} \\ \delta_{\alpha 1}^{(2)} C^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{\alpha 1}^{(n)} C^{(n)} \end{vmatrix} \vec{r}_1 + \\ + \| X_1(x_k) X_2(x_k) \dots X_n(x_k) \| \begin{vmatrix} \delta_{\alpha 2}^{(1)} C^{(1)} \\ \delta_{\alpha 2}^{(2)} C^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{\alpha 2}^{(n)} C^{(n)} \end{vmatrix} \vec{r}_2 + \\ \dots \\ + \| X_1(x_k) X_2(x_k) \dots X_n(x_k) \| \begin{vmatrix} \delta_{\alpha i_1}^{(1)} C^{(1)} \\ \delta_{\alpha i_1}^{(2)} C^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{\alpha i_1}^{(n)} C^{(n)} \end{vmatrix} \vec{r}_{i_1} \quad (21.5)$$

ИЛИ

$$R(x_k, y_\alpha) = \| \vec{X}'_k \vec{X}'_k \dots \vec{X}'_k \| \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_s \\ \vdots \\ \sigma_{i_1} \end{vmatrix} \| \vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots \vec{r}_{i_1} \|, \quad (21.6)$$

где

$$\vec{X}_k = \begin{pmatrix} X_1(x_k) \\ X_2(x_k) \\ \vdots \\ X_n(x_k) \end{pmatrix}; \quad \sigma_s = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha s}^{(1)} C^{(1)} \\ \delta_{\alpha s}^{(2)} C^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{\alpha s}^{(n)} C^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец сил взаимодействия определится по формуле

$$\vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 & \vec{X}_1 & \dots & \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 & \vec{X}_2 & \dots & \vec{X}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{X}_n & \vec{X}_n & \dots & \vec{X}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_s \\ \vdots \\ \sigma_{t_1} \end{pmatrix} \|\vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots \vec{r}_{t_1}\|. \quad (21.7)$$

Вектор \vec{Q}_α расчетных усилий, приходящихся на одну раму с номером α , получим как разность следующих векторов:

$$\vec{Q}_\alpha = \vec{Q} - \vec{R}_\alpha, \quad (21.8)$$

где \vec{Q} — сосредоточенная в уровнях перекрытий ветровая нагрузка, приходящаяся на одну раму.

§ 22. УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ

Изложенный выше метод сравнительно легко обобщается на случай пространственного распределения ветровой нагрузки $q = F(x_k, y)$.

В настоящее время этот вопрос приобретает особо важное значение, так как он связан непосредственно с выбором пространственной расчетной схемы. Имеющиеся экспериментальные данные (см. гл. I) свидетельствуют о том, что профиль ветра по длине здания значительно отличается от прямоугольного. Протяженные в плане здания вносят возмущение в ветровой поток. Однако этот фактор до сих пор при расчете зданий на ветровые нагрузки не учитывался. Неравномерность распределения ветровой нагрузки по периметру здания в ряде случаев может быть весьма значительной, что в свою очередь может отразиться существенным образом на распределении ветровой нагрузки между элементами здания.

Разделим горизонтальный профиль ветровой нагрузки на f вертикальных участков. Количество участков зависит от степени неравномерности этого профиля. После этого всю ветровую нагрузку

можно представить как совокупность f векторов-столбцов, координатами которых являются нагрузки, приведенные к уровням перекрытий:

$$Q = \|\vec{Q}_1 \vec{Q}_2 \dots \vec{Q}_\alpha \dots \vec{Q}_f\|, \quad (22.1)$$

где

$$\vec{Q}_\alpha = \begin{Bmatrix} Q_{1\alpha} \\ Q_{2\alpha} \\ \vdots \\ Q_{n\alpha} \end{Bmatrix}.$$

Пусть на неполный пространственный каркас действует один вектор-столбец ветровых нагрузок \vec{Q}_α . Вычислим работы этих нагрузок на перемещениях неполного пространственного каркаса от обобщенных единичных сил $r_p^{(i)} = 1$, прикладываемых поочередно в плоскостях различных диафрагм ($p = 1, 2, \dots, \alpha$).

Как уже отмечалось, при загрузении единичными обобщенными силами пространственный каркас распадается на соответствующие плоские элементы (рамы и перекрытия). Вследствие этого его перемещения представляется возможным определить по формуле

$$V^{(i)}(x_k, y_\alpha) = X_i(x_k) \delta_{\alpha p}^{(i)}, \quad (22.2)$$

где $\delta_{\alpha p}^{(i)}$ — перемещение перекрытия в плоскости действия вектора-столбца ветровой нагрузки \vec{Q}_α от единичной силы, приложенной в месте постановки p -й диафрагмы.

Тогда работа $b_{q\alpha p}^{(i)}$ (обобщенные перемещения от нагрузки) может быть определена так:

$$b_{q\alpha p}^{(i)} = \sum_{k=1}^n V^{(i)}(x_k, y_\alpha) Q_{k\alpha} = \sum_{k=1}^n X_i(x_k) \delta_{\alpha p}^{(i)} Q_{k\alpha}. \quad (22.3)$$

Перепишем это равенство в матричной форме:

$$b_{q\alpha p}^{(i)} = \vec{X}'_i(x_k) \delta_{\alpha p}^{(i)} \vec{Q}_\alpha. \quad (22.4)$$

В формуле (22.4) $\delta_{\alpha p}^{(i)}$ является скаляром, в силу чего это равенство может быть переписано в следующем виде:

$$b_{q\alpha p}^{(i)} = \delta_{\alpha p}^{(i)} \vec{X}'_i(x_k) \vec{Q}_\alpha. \quad (22.5)$$

Векторы-столбцы грузовых членов разрешающих уравнений имеют вид:

$$\vec{b}_{q\alpha} = \begin{Bmatrix} \vec{b}_{q\alpha 1} \\ \vec{b}_{q\alpha 2} \\ \vdots \\ \vec{b}_{q\alpha t_1} \end{Bmatrix}, \quad (22.6)$$

где

$$\vec{b}_{q\alpha 1} = \begin{vmatrix} b_{q\alpha 1}^{(1)} \\ b_{q\alpha 1}^{(2)} \\ \dots \\ b_{q\alpha 1}^{(n)} \end{vmatrix}, \dots, \vec{b}_{q\alpha t_1} = \begin{vmatrix} b_{q\alpha t_1}^{(1)} \\ b_{q\alpha t_1}^{(2)} \\ \dots \\ b_{q\alpha t_1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Загрузим теперь неполный пространственный каркас всеми вектор-столбцами ветровых нагрузок α . Учитывая, что имеется α вариантов загрузки, полную матрицу грузовых коэффициентов запишем в виде

$$\|B_q\| = \begin{vmatrix} \vec{b}_{q11} & \vec{b}_{q12} & \dots & \vec{b}_{q1\alpha} & \dots & \vec{b}_{q1f} \\ \vec{b}_{q21} & \vec{b}_{q22} & \dots & \vec{b}_{q2\alpha} & \dots & \vec{b}_{q2f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{b}_{qt_11} & \vec{b}_{qt_12} & \dots & \vec{b}_{qt_1\alpha} & \dots & \vec{b}_{qt_1f} \end{vmatrix}, \quad (22.7)$$

а матрицу групповых неизвестных представим как

$$\|r\| = \begin{vmatrix} \vec{r}_{11} & \vec{r}_{12} & \dots & \vec{r}_{1\alpha} & \dots & \vec{r}_{1f} \\ \vec{r}_{21} & \vec{r}_{22} & \dots & \vec{r}_{2\alpha} & \dots & \vec{r}_{2f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{r}_{t_11} & \vec{r}_{t_12} & \dots & \vec{r}_{t_1\alpha} & \dots & \vec{r}_{t_1f} \end{vmatrix}. \quad (22.8)$$

Тогда система разрешающих уравнений метода сил в комбинации с методом расчленения-склеивания в этом случае примет вид

$$(A + B) \cdot \|r\| = \|B_q\|. \quad (22.9)$$