

### РАЗВИТИЕ МЕТОДА СИЛ В КОМБИНАЦИИ С МЕТОДОМ РАСЧЛЕНЕНИЯ

#### § 5. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В каркасных зданиях, запроектированных по рамно-связевой схеме, пренебрежение жесткостью каркаса недопустимо. Однако учет этого фактора вызывает серьезные затруднения в расчетах, так как формы изгиба поперечных рам и вертикальных диафрагм могут быть существенно различными, и число неизвестных вырастет настолько, что использование ЭВМ является обязательным.

В данной главе предложен практический метод расчета, в котором число неизвестных значительно уменьшено, а обусловленность матрицы системы разрешающих уравнений улучшена. Число неизвестных равно  $t_1 \times n$  ( $t_1$  — число вертикальных диафрагм жесткости;  $n$  — число этажей).

Метод расчета основан на следующих допущениях: поперечные рамы моделируются условным сдвиговым стержнем, а сборные перекрытия — изгибно-сдвиговыми либо (для протяженных зданий) изгибным стержнем; деформации кручения вертикальных и горизонтальных элементов не учитываются; число этажей достаточно велико (более 5—8), поэтому дискретные связи, соединяющие перекрытия и вертикальные элементы, можно заменить распределенными, континуальными; число поперечных рам не менее 4—5, а поэтому их жесткости могут быть равномерно распределены по длине здания; все поперечные рамы одинаковы и расположены на равных расстояниях одна от другой; распределение ветровой нагрузки по длине здания принимается равномерным, а по высоте — по линейному закону (в форме трапеции).

Указанные выше допущения не являются новыми, они используются в ряде других работ [5—14, 23, 24].

$$K_{is} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_i; x_1, y_s) & K(x_1, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_1, y_i; x_n, y_s) \\ K(x_2, y_i; x_1, y_s) & K(x_2, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_2, y_i; x_n, y_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, y_i; x_1, y_s) & K(x_n, y_i; x_2, y_s) & \dots & K(x_n, y_i; x_n, y_s) \end{vmatrix};$$

$$D_s = \begin{vmatrix} \delta_s(x_1, x_1) & \delta_s(x_1, x_2) & \dots & \delta_s(x_1, x_n) \\ \delta_s(x_2, x_1) & \delta_s(x_2, x_2) & \dots & \delta_s(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_s(x_n, x_1) & \delta_s(x_n, x_2) & \dots & \delta_s(x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

$$(s = 1, 2, \dots, t_1);$$

$n$  — число этажей;  $y_i, y_s$  — расстояния от левой торцевой диафрагмы до диафрагмы с номерами  $i, s$ ;  $x_k$  — расстояние от основания здания до перекрытия с номером  $k$ ;  $\delta_s(x_k, x_r)$  — единичные перемещения диафрагмы с номером  $s$ ;  $K(x_k, y_i, x_r, y_s)$  — то же неполного пространственного рамного каркаса;  $\Delta_k$  — перемещения в уровне  $k$ -го перекрытия неполного каркаса относительно вертикальных диафрагм от ветровой равномерно распределенной по длине здания нагрузки.

За счет выбора статически неопределимой основной системы число неизвестных значительно снижено. Для наиболее распространенных зданий повышенной этажности уравнения (6.1) можно решить на машинах среднего класса. Однако эти уравнения имеют два существенных недостатка: 1) единичные перемещения каркаса определяются путем раскрытия статической неопределимости сложной пространственной системы; 2) матрица системы (6.1) плохо обусловлена. Излагаемый ниже метод свободен от этих недостатков.

## § 7. ГРУППОВЫЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ И РАСПАДАЕМОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЕДИНИЧНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Перейдем от обычных неизвестных  $R_s(x_k)$  к групповым неизвестным  $r_s^{(i)}$ , связь между которыми выражается зависимостью

$$R_s(x_k) = \sum_{i=1}^n X_i(x_k) r_s^{(i)}, \quad (7.1)$$

где  $X_i(x_k)$  — функция перехода от новых неизвестных к старым.

Выберем в качестве функции перехода амплитудную функцию горизонтальных прогибов собственных колебаний поперечной рамы  $X_i(x_k)$ . Загрузим в единичных состояниях неполный пространственный каркас и вертикальную диафрагму с номером  $s$  единичной обобщенной силой  $r_s^{(i)} = 1$ . Это значит, что в уровне перекрытий каждого этажа в соответствующем сечении приложены горизонтальные сосредоточенные силы, равные ординатам амплитудной функции прогибов  $X_i(x_k)$  (рис. 1.11).

Неполный пространственный каркас, состоящий из подобных вертикальных элементов рам и перекрытий и нагруженный силами

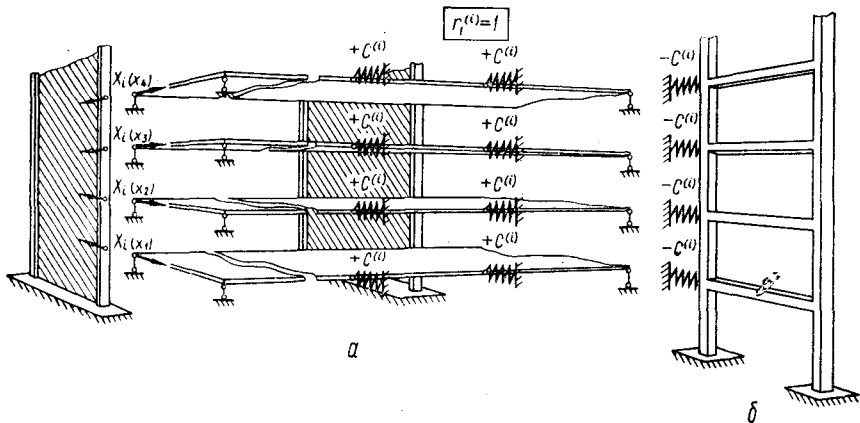


Рис. I.11. Распадаемость пространственной основной системы на плоские элементы в единичных состояниях:

а — загрузка диафрагм жесткости и перекрытий групповыми силами; б — квазистатическая модель плоской поперечной рамы.

$X_i(x_k)$ , распадается на плоские элементы: перекрытия на поддерживающих опорах жесткостью  $+C^{(i)}$  и вертикальные элементы на толкающих опорах жесткостью  $-C^{(i)}$ . Необходимым условием такого расчленения является выполнение гипотезы о подобии форм изгиба выделенных из здания вертикальных элементов от воздействия толкающих связей. Распадаемость такого пространственного каркаса на плоские элементы доказана авторами [10, 13].

Так как в пространственном каркасе, входящем в основную систему метода сил (см. рис. I.10), все поперечные рамы одинаковы, то условие подобия форм изгиба выполняется строго.

Таким образом, в единичных состояниях пространственный каркас распадается на плоские элементы: перекрытия на поддерживающих упругих опорах жесткостью  $+C^{(i)}$  и поперечные рамы на толкающих упругих опорах жесткостью  $-C^{(i)}$  (см. рис. I.11). В дальнейшем это позволит получить для единичных перемещений каркаса готовые формулы. Введение групповых неизвестных полезно также с точки зрения улучшения обусловленности матрицы системы разрешающих уравнений.

#### § 8. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ГРУППОВЫМ (ОБОБЩЕННЫМ) СИЛАМ. ЕДИНИЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДИАФРАГМ И НЕПОЛНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАРКАСА

Вначале определим для вертикальных диафрагм единичные перемещения, соответствующие групповым (обобщенным) силам и обобщенным перемещениям.

Обобщенные перемещения, соответствующие введенным групповым силам  $r_s^{(i)}$ , определим из условия равенства работ, представленных через элементарные силы  $R_s(x_k)$  и перемещения  $v_s(x_k)$

и через обобщенные силы  $r_s^{(i)}$  и перемещения  $q_s^{(i)}$ ,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_s(x_k) R_s(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_s^{(i)} r_s^{(i)}. \quad (8.1)$$

Подставим в уравнение (8.1) выражение  $R_s(x_k)$  из формулы (7.1):

$$\sum_{i=1}^n r_s^{(i)} \sum_{k=1}^n v_s(x_k) X_i(x_k) = \sum_{i=1}^n q_s^{(i)} r_s^{(i)}. \quad (8.2)$$

Сравнивая левую и правую части равенства (8.2), получим

$$q_s^{(i)} = \sum_{k=1}^n v_s(x_k) X_i(x_k); \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (8.3)$$

На основании обобщенного закона Гука горизонтальные перемещения диафрагм  $v_s(x_k)$  получим как линейную комбинацию элементарных сил  $R_s(x_k)$  и единичных перемещений диафрагм

$$v_s(x_k) = \sum_{r=1}^n \delta_s(x_k, x_r) R_s(x_r). \quad (8.4)$$

Подставим (8.4) в формулу (8.3):

$$q_s^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \delta_s(x_k, x_r) X_i(x_k) R_s(x_r). \quad (8.5)$$

Заменим в равенстве (8.5) элементарные силы обобщенными (при подстановке (7.1) в (8.5) индекс суммирования заменим на  $m$ ):

$$q_s^{(i)} = \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \delta_s(x_k, x_r) X_i(x_k) X_s(x_r) \right] r_s^{(m)}. \quad (8.6)$$

Выражение (8.6) для обобщенных перемещений перепишем в следующем виде:

$$q_s^{(i)} = \sum_{m=1}^n a_s^{(im)} r_s^{(m)}, \quad (8.7)$$

где

$$a_s^{(im)} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \delta_s(x_k, x_r) X_i(x_k) X_m(x_r); \quad (8.8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n).$$

По формуле (8.8) определяются единичные перемещения для вертикальных диафрагм, соответствующие обобщенным силам и перемещениям.

Перейдем к определению единичных обобщенных перемещений для неполного пространственного каркаса. Аналогично изложенному можно получить

$$b_{sp}^{(im)} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n k(x_k, y_s; x_r, y_p) X_i(x_k) X_m(x_r); \quad (8.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n; \quad s = 1, 2, \dots, t_1; \\ p = 1, 2, \dots, t_1).$$

По этой формуле можно определить все единичные перемещения каркаса. Однако пользоваться ею неудобно, поскольку остались отмеченные выше трудности определения единичных (от элементарных сил) перемещений  $k$  ( $x_k, y_s; x_r, y_p$ ) пространственного каркаса.

Как видно из формулы (8.9), величина  $b_{sp}^{(im)}$  имеет физический смысл работы единичных групповых сил с номером  $i$ , приложенных к каркасу в точках присоединения диафрагмы с номером  $s$ , на перемещениях от единичных групповых сил с номером  $m$ . Действительно, суммирование произведений единичных перемещений на силы  $X_m(x_r)$  дает перемещения от этих сил. Суммирование же произведения последних на силы  $X_i(x_k)$  дает величину работы.

Исходя из физического смысла единичных обобщенных перемещений  $b_{sp}^{(im)}$ , приведем иной способ их определения.

В точках присоединения к каркасу диафрагмы с номером  $p$  приложим единичные групповые силы  $X_m(x_k)$ . Как показано в предыдущем параграфе, неполный пространственный каркас в единичном состоянии распадается на плоские элементы: перекрытия на поддерживающих опорах жесткостью  $+C^{(i)}$  и поперечные рамы на толкающих опорах жесткостью  $-C^{(i)}$  (см. рис. 1.11). Тогда перемещения каркаса  $v(x_k, y_s)$  в точках присоединения диафрагмы с номером  $s$  определяются по формуле

$$v(x_k, y_s) = X_m(x_k) \delta(y_s, y_p; C^{(m)}); \quad (8.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\delta(y_s, y_p; C^{(m)})$  — единичные перемещения перекрытия в своей плоскости, находящегося на упругих опорах жесткостью  $C^{(m)}$ .

Единичные обобщенные перемещения  $b_{sp}^{(im)}$  определим как работу сил  $X_i(x_k)$ , приложенных к каркасу в сечении с координатой  $y_p$  на перемещениях  $v(x_k, y_s)$ :

$$b_{sp}^{(im)} = \sum_{k=1}^n v(x_k, y_s) X_i(x_k) = \sum_{k=1}^n \delta(y_s, y_p; C^{(m)}) X_i(x_k) X_m(x_k). \quad (8.11)$$

Величину  $\delta(y_s, y_p; C^{(m)})$  можно вынести за знак суммы:

$$b_{sp}^{(im)} = \delta(y_s, y_p; C^{(m)}) \sum_{k=1}^n X_i(x_k) X_m(x_k). \quad (8.12)$$

В силу ортогональности функций  $X_i(x_k)$  и  $X_m(x_k)$

$$b_{sp}^{(im)} = \begin{cases} 0 & i \neq m \\ \delta(y_s, y_p; C^{(m)}) \sum_{k=1}^n X_i^2(x_k) & i = m. \end{cases} \quad (8.13)$$

Таким образом, определение единичных обобщенных перемещений неполного пространственного каркаса можно выполнить пользуясь формулой (8.13) без раскрытия его статической неопределимости.





стояния равновесия квазистатической модели пространственного каркаса является аналогом его собственных колебаний с сосредоточенными массами  $M$  в узлах пересечения перекрытий и поперечных рам. Переход от этой задачи к другой выполняется следующим образом:

$$C^{(v)} = M\omega_v^2, \quad (10.1)$$

где  $\omega_v$  —  $v$ -я частота собственных колебаний.

Решение задачи о собственных колебаниях неполного пространственного каркаса известно [10, 13]. Используя это решение и указанную выше аналогию, нетрудно определить жесткости толкающих опор. Уравнения равновесия метода перемещений в матричной форме имеют вид [13]:

$$U_v L + \bar{L} U_v = C^{(v)} U_v, \quad (10.2)$$

$$U_v = \begin{pmatrix} U_{11}^v & U_{12}^v & \dots & U_{1t_2}^v \\ U_{21}^v & U_{22}^v & \dots & U_{2t_2}^v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1}^v & U_{n2}^v & \dots & U_{nt_2}^v \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— матрица горизонтальных смещений узлов} \\ \text{каркаса, определяющая пространственную} \\ \text{форму изгиба с номером } v; \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1t_2} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{t_2 1} & l_{t_2 2} & \dots & l_{t_2 t_2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— матрица единичных реакций перекрытия;} \end{array}$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{12} & \dots & \bar{l}_{1n} \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \dots & \bar{l}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \dots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— то же поперечной рамы;} \end{array}$$

$t_2$  — число поперечных рам;  $n$  — число этажей.

Выделим из пространственного каркаса перекрытие и поперечную раму и в узловых точках соединим их с равноупругими опорами, имеющими отрицательные жесткости соответственно  $C_1^{(i)}$  и  $C_2^{(j)}$ .

Запишем матричные уравнения равновесия для этих задач:

$$\bar{L} X_i = C_1^{(i)} X_i; \quad (10.3)$$

$$L V_j = C_2^{(j)} V_j, \quad (10.4)$$

где

$$X_i = \begin{pmatrix} X_i(x_1) \\ X_i(x_2) \\ \dots \\ X_i(x_n) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— } i\text{-я форма изгиба поперечной рамы;} \end{array}$$

$$V_j = \begin{pmatrix} V_j(y_1) \\ V_j(y_2) \\ \dots \\ V_j(y_{t_2}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— } j\text{-я форма изгиба перекрытия.} \end{array}$$



Решение уравнения (10.2) будем разыскивать в виде

$$U_v = X_i V'_i, \quad (10.5)$$

где  $V'_j$  — транспонированная матрица (матрица-строка).

Подставим это решение в уравнение (10.2):

$$X_i V'_i L + \bar{L} X_i V'_i = C^{(v)} X_i V'_i.$$

Используя зависимость (10.3), а также

$$V'_i L = C_2^{(j)} V'_i, \quad (10.6)$$

получим

$$X_i C_2^{(j)} V'_i + C_1^{(i)} X_i V'_i = C^{(v)} X_i V'_i$$

или

$$(C_1^{(i)} + C_2^{(j)}) X_i V'_i = C^{(v)} X_i V'_i. \quad (10.7)$$

Из равенства левой и правой частей уравнения (10.7) следует

$$C^{(v)} = C_1^{(i)} + C_2^{(j)}.$$

Заменим в этом равенстве  $v$  на двойной индекс  $ij$

$$C^{(ij)} = C_1^{(i)} + C_2^{(j)}. \quad (10.8)$$

Таким образом, жесткости толкающих опор неполного пространственного каркаса равны сумме жесткостей толкающих опор поперечной рамы и перекрытия. С математической точки зрения полученный результат означает, что собственные числа пространственной задачи равны сумме собственных чисел двух плоских задач.

Переход к задаче о собственных колебаниях пространственного каркаса осуществляется путем замены в равенстве (10.8)  $C^{(ij)}$  величиной  $M\omega_{ij}^2$ :

$$M\omega_{ij}^2 = C_1^{(i)} + C_2^{(j)}, \quad (10.9)$$

где  $\omega_{ij}$  — частота собственных колебаний неполного пространственного каркаса.

Формы изгиба, соответствующие собственным числам  $C^{(ij)}$ , либо частотам  $\omega_{ij}$ , имеют вид

$$V_{i_i} = X_i V'_i = \begin{vmatrix} X_i(x_1) \\ X_i(x_2) \\ \vdots \\ X_i(x_n) \end{vmatrix} \| V_i(y_1) V_i(y_2) \dots V_i(y_{t_2}) \|. \quad (10.10)$$

#### § 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ РАМ И ПЕРЕКРЫТИЙ ЖЕСТКОСТЕЙ ТОЛКАЮЩИХ ОПОР И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ПЛОСКИХ ФОРМ ИЗГИБА

Воспользуемся для определения  $C_1^i$ ,  $C_2^{(j)}$ ,  $X_i(k)$  и  $V_j(y)$  указанной в предыдущем параграфе аналогией между задачей определения жесткостей толкающих опор и соответствующих форм изгиба и задачей определения частот и форм собственных колебаний.

Рассмотрим колебания монотонной рамы, обладающей однообразным характером геометрической схемы и постоянными величинами (по высоте) жесткостей ригелей и стоек.

Как известно, при действии единичной силы, приложенной к одному из ярусов, узлы деформированной монотонной рамы, расположенные ниже силы, находятся приблизительно на одной наклонной прямой (выше приложения силы узлы рамы перемещаются почти поступательно). Линейный перекося стоек нижних ярусов можно выразить в виде суммы двух величин:

а) перекося стоек рамы с защемленными горизонтально подвижными узлами от нагрузки  $P = 1$

$$\Delta_1 = \frac{h^2}{12s_c}$$

( $h$  — высота этажа;  $s_c$  — сумма погонных жесткостей стоек рамы);

б) перекося стоек от поворота узлов верхнего и нижнего концов стоек  $\varphi = h/12r_p$  ( $r_p$  — сумма погонных жесткостей ригелей этажа).

Линейный перекося при единичном угле поворота составляет половину высоты яруса. Следовательно,

$$\Delta_2 = \frac{h}{12r_p} \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) = \frac{h^2}{12r_p}.$$

Суммарный линейный перекося составит

$$\Delta = \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{s_c} + \frac{1}{r_p} \right). \quad (11.1)$$

Линейный перекося, приходящийся на единицу высоты здания, равен  $\Delta/h$ . Сдвиговая жесткость рамы является величиной, обратной линейному перекося. Заменим монотонную раму эквивалентным по жесткости стержнем, работающем только на сдвиг (сдвиговой стержень).

Дифференциальное уравнение колебаний сдвигового стержня:

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - GF \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (11.2)$$

где  $m$ ,  $GF$  — погонная масса и сдвиговая жесткость стержня.

Заменив в уравнении (11.2) величину  $GF$  сдвиговой жесткостью рамы  $h/\Delta$ , получим дифференциальное уравнение колебаний монотонной рамы

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{h}{\Delta} \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (11.3)$$

Решение уравнения (11.3) будем разыскивать в виде

$$y(x, t) = X(x) \sin \omega t, \quad (11.4)$$

где  $\omega$  — частота собственных колебаний;  $X(x)$  — искомая функция амплитудных прогибов.

Подставляя (11.4) в уравнение (11.3), для функции  $X(x)$  получим

$$X''(x) + a^2 X(x) = 0, \quad (11.5)$$

где

$$a^2 = m\omega^2 \frac{\Delta}{h}.$$

Решение уравнения (11.5) имеет вид

$$X(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cos ax. \quad (11.6)$$

Граничные условия задачи:

в основании рамы (при  $x = 0$ ) горизонтальное смещение отсутствует

$$X(x) = A_1 \sin a0 + A_2 \cos a0 = 0; \quad A_2 = 0;$$

в верхнем конце рамы (при  $x = H$ ) отсутствует поперечная сила

$$Q(H) = \frac{h}{\Delta} X'(H) = 0; \quad A_1 a \cos aH = 0.$$

Постоянная  $A_1$  не равна нулю, так как в противном случае будем иметь состояние покоя. Следовательно, нужно положить

$$\cos aH = 0. \quad (11.7)$$

Это и есть уравнение частот монотонной рамы. Из него следует

$$aH = \frac{(2i-1)\pi}{2} \quad (i = 1, 2, 3 \dots). \quad (11.8)$$

Частоты собственных колебаний монотонной рамы определяются по формуле

$$\omega_i^2 = a^2 \frac{h}{\Delta m} = \frac{(2i-1)^2 \pi^2}{4H^2} \cdot \frac{h}{\Delta m}. \quad (11.9)$$

Формы колебаний рамы представляют собой синусоиды

$$X_i(x) = A_1 \sin ax = A_1 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2H} x = A_1 \sin \lambda_i x, \quad (11.10)$$

где

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H}.$$

Жесткости  $C_1^{(i)}$  толкающих опор равны произведению массы  $mH/n$ , сосредоточенной в уровне этажа, на квадрат частот  $\omega_i^2$  собственных колебаний рамы

$$C_1^{(i)} = \frac{mH}{n} \omega_i^2 = \frac{(2i-1)^2 \pi^2}{4n^2 \Delta}. \quad (11.11)$$

Перейдем к определению жесткостей  $C_2^{(j)}$  толкающих опор перекрытий. Как и в предыдущем случае, воспользуемся аналогией с

задачей о собственных колебаниях перекрытия с сосредоточенными массами  $M$ .

Если число сосредоточенных масс  $M$  велико (четыре и более), то их можно равномерно распределить по длине балки. Величина погонной массы  $m'$  равна  $Mt_2/L$  ( $L$  — длина перекрытия).

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний перекрытия имеет вид

$$[EI] \frac{\partial^4 v(y, t)}{\partial y^4} = -m' \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial t^2}, \quad (11.12)$$

где  $[EI]$  — приведенная изгибная жесткость (с учетом сборности перекрытий).

Решение дифференциального уравнения (11.12) получим, положив

$$v(y, t) = V(y) \sin \omega t, \quad (11.13)$$

где  $V(y)$  — функция амплитудных пригибов.

Уравнение (11.12) с учетом (11.13):

$$V_{(y)}^{IV} - u^4 V(y) = 0, \quad (11.14)$$

где  $u^4 = \frac{m' \omega^2}{[EI]}$ .

Общий интеграл уравнения (11.14) может быть представлен как некоторая функция начальных параметров  $V_0, V'_0, M_0, Q_0$ :

$$V(y) = V_0 S(uy) + \frac{V'_0}{u} T(uy) - \frac{M_0}{u^2 [EI]} U(uy) - \frac{Q_0}{u^3 [EI]} V(uy), \quad (11.15)$$

где

$$S(uy) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} uy + \cos uy); \quad T(uy) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} uy + \sin uy);$$

$$U(uy) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} uy - \cos uy); \quad V(uy) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} uy - \sin uy).$$

Функции  $S(uy)$ ,  $T(uy)$ ,  $U(uy)$  и  $V(uy)$  протабулированы [1].

Начальные параметры будем отыскивать из граничных условий.

На левом конце перекрытия изгибающий момент и поперечная сила равны нулю, т. е.  $M_0 = 0$ ;  $Q_0 = 0$ , тогда

$$V(y) = V_0 S(uy) + \frac{V'_0}{u} T(uy).$$

Для симметричных колебаний перекрытия имеем:

$$V'\left(\frac{L}{2}\right) = 0; \quad [EI] V'''\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} V' \left( \frac{L}{2} \right) = V_0 u V \left( \frac{\lambda}{2} \right) + V'_0 S \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0; \\ [EI] V''' \left( \frac{L}{2} \right) = V_0 u^3 T \left( \frac{\lambda}{2} \right) + V'_0 u^2 U \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

где  $\lambda = uL$ .

Частотное уравнение перекрытия получим, приравняв нулю определитель системы (11.16):

$$\begin{vmatrix} uV \left( \frac{\lambda}{2} \right) & S \left( \frac{\lambda}{2} \right) \\ u^3 T \left( \frac{\lambda}{2} \right) & u^2 U \left( \frac{\lambda}{2} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$V \left( \frac{\lambda}{2} \right) U \left( \frac{\lambda}{2} \right) - T \left( \frac{\lambda}{2} \right) S \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0$$

или

$$\operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda_j}{2} + \operatorname{sh} \frac{\lambda_j}{2} \cos \frac{\lambda_j}{2} = 0. \quad (11.17)$$

Ненулевые корни этого уравнения:

$$\lambda_1 = 4,73; \quad \lambda_2 = 10,996; \quad \lambda_3 = 17,279; \quad \dots \quad (11.18)$$

Форма упругой линии перекрытия для симметричных колебаний будет

$$V_i(y) = S(uy) - \frac{V \left( \frac{\lambda_j}{2} \right)}{S \left( \frac{\lambda_j}{2} \right)} T(u_j y). \quad (11.19)$$

Для кососимметричных колебаний перекрытий с учетом граничных условий  $V \left( \frac{L}{2} \right) = 0$ ,  $[EI] V'' \left( \frac{L}{2} \right) = 0$  частотное уравнение перекрытий запишется как

$$S \left( \frac{\lambda}{2} \right) V \left( \frac{\lambda}{2} \right) - U \left( \frac{\lambda}{2} \right) T \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 0$$

или

$$\operatorname{ch} \frac{\lambda_j}{2} \sin \frac{\lambda_j}{2} - \operatorname{sh} \frac{\lambda_j}{2} \cos \frac{\lambda_j}{2} = 0. \quad (11.20)$$

Корни уравнения (11.20) равны:

$$\lambda_1 = 7,8532; \quad \lambda_2 = 14,137; \quad \dots \quad (11.21)$$

Форма упругой линии перекрытия определится выражением

$$V_i(y) = S(u_i y) - \frac{S\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)}{T\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)} T(u_i y). \quad (11.22)$$

Жесткости  $C_2^{(j)}$  толкающих опор перекрытия равны произведению массы  $m'L/t_2$  на квадрат частот собственных колебаний перекрытия:

$$C_2^{(j)} = \frac{m'L}{t_2} \omega_j^2. \quad (11.23)$$

Учитывая зависимость  $\omega_j^2 = \lambda_j^4 \frac{[EI]}{m'L^4}$ , выражение (11.23) запишется в виде

$$C_2^{(j)} = \lambda_j^4 \frac{[EI]}{t_2 L^3}. \quad (11.24)$$

## § 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДИАФРАГМ ЖЕСТКОСТИ И ПЕРЕКРЫТИЙ

**Сплошные диафрагмы.** Единичные перемещения вертикальной диафрагмы жесткости с учетом изгиба и сдвига определим по формуле Мора. Расчетные формулы будут иметь различные выражения для сечений выше и ниже точки приложения единичной горизонтальной сосредоточенной силы и запишутся в следующем виде:

для сечения  $x \geq \tau$

$$\delta_1(x, \tau) = \frac{\tau^2}{2EI} \left(x - \frac{\tau}{3}\right) + \frac{k_1}{GF} \tau; \quad (12.1)$$

для сечения  $x \leq \tau$

$$\delta_2(x, \tau) = \frac{x^2}{2EI} \left(\tau - \frac{x}{3}\right) + \frac{k_1}{GF} x, \quad (12.2)$$

где  $EI$ ,  $GF$  — изгибная и сдвиговая жесткости сплошной диафрагмы;  $\tau$  — координата точки приложения сосредоточенной единичной силы;  $k_1$  — коэффициент, учитывающий неравномерное распределение по сечению касательных напряжений (зависит от формы сечения, для прямоугольного сечения  $k_1 = 1,2$ ).

Влияние податливости основания на величину перемещения может быть учтено дополнительными слагаемыми:

от сдвига основания

$$\delta_z = \frac{1}{K_z}; \quad (12.3)$$

от поворота основания

$$\delta_\phi = \frac{\tau}{K_\phi} x, \quad (12.4)$$

где  $K_z = C_z I_\phi$  — сдвиговая жесткость основания (определяется сопротивлением грунта как под подошвой фундамента, так и по боковым его поверхностям, по которым происходит трение и сжатие

грунта);  $K_\phi = C_\phi I_p$  — угловая жесткость основания (определяется сопротивлением грунта при повороте фундамента сооружения относительно оси, проходящей через центр тяжести площади фундамента);  $C_z$  — коэффициент упругого равномерного сдвига —  $C_z = 0,7C_x$ ;  $C_\phi$  — коэффициент упругого неравномерного сжатия —  $C_\phi = 2C_x$ ;  $C_x$  — коэффициент упругого равномерного сжатия, зависящий от величины основного расчетного сопротивления грунта (табл. 14, СНиП II-Б, 1—62);  $F_\phi$ ,  $I_\phi$  — площадь основания фундамента и момент инерции площади основания фундамента относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Коэффициенты упругого равномерного сжатия  $C_x$  для различных категорий грунтов при площади фундамента  $F_\phi > 10 \text{ м}^2$  имеют следующие численные значения: для слабых грунтов — 500—2000; для средних — 1500—4000; для плотных — 4000—10 000  $\text{т/м}^3$ .

Если глубина заложения прямоугольного фундамента  $h_\phi$  намного больше размеров в плане  $a_\phi$  и  $b_\phi$ , то жесткость основания при сдвиге и повороте приближенно определяется по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} K_z &= 0,7C_x F_\phi; \\ K_\phi &= C_x \frac{b_\phi a_\phi^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

**Диафрагмы с проемами.** Определение прогибов для диафрагм при одном, двух и нескольких рядах проемов от единичной горизонтальной сосредоточенной силы производится по общей формуле, которая имеет следующий вид [8]:

для сечения  $x \geq \tau$

$$\delta_1(x, \tau) = \frac{1}{B_0} \left\{ \tilde{B} \left[ \frac{\text{sh } \chi x - [\text{ch}(\chi H - \chi x) - 1] \text{sh } \chi \tau}{\text{ch } \chi H} - \text{th } \chi H + \chi(H-x) \right] + \frac{x-\tau}{2}(H-x)^2 + \frac{(H-x)^3}{3} \right\}, \quad (12.6)$$

а при  $x \leq \tau$

$$\delta_2(x, \tau) = \frac{1}{B_0} \left\{ \tilde{B} \left[ \frac{\text{sh } \chi \tau - [\text{ch}(\chi H - \chi \tau) - 1] \text{sh } \chi x}{\text{ch } \chi H} - \text{th } \chi H + \chi(H-\tau) \right] + \frac{\tau-x}{2}(H-\tau)^2 + \frac{(H-\tau)^3}{3} \right\}, \quad (12.7)$$

где  $B_0 = \sum EI + \frac{e}{f}$  — общая изгибная жесткость всей диафрагмы;  $\sum EI$  — сумма жесткостей столбов диафрагмы;  $e$  — расстояние между центрами тяжести поперечных сечений соседних вертикальных элементов (столбов);  $f = \frac{1+d}{E_0 F_{ne}}$  — параметр, зависящий от податливости связей (перемычек и связей сдвига);  $E_0, F_n$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения крайнего левого столба диафрагмы;  $d = \frac{F_n}{F_n}$  — коэффициент, зависящий от соотношения же-

стоек крайних столбов диафрагмы, соответственно левого и правого

(для симметричной диафрагмы  $d=1$ );  $\tilde{B} = \frac{e}{\chi^3 f \Sigma EI}$ ;  $\chi = \sqrt{\frac{1}{\chi} \left( f + \frac{e}{\Sigma EI} \right)}$  —

характеристика жесткости;  $\kappa = \frac{hb^3}{12Be}$  — коэффициент, характеризующий сопротивление стержневой части несущей конструкции (перемычки, ригели) в пределах одного этажа;  $b$  — ширина проема;  $B$  — изгибная жесткость перемычек (ригелей).

Для двухстолбовой диафрагмы:

с одним рядом проемов

$$\chi = \sqrt{\frac{jB_0}{\kappa \Sigma EI}}; \quad (12.8)$$

с двумя рядами проемов

$$\chi = \sqrt{\frac{12BB_0}{hb^3 E_6 F_n \Sigma EI}}. \quad (12.9)$$

При нескольких рядах проемов с  $n$  равными пролетами и одинаковыми столбами характеристика жесткости имеет вид

$$\chi = \sqrt{\frac{ne}{\kappa \Sigma EI}}. \quad (12.10)$$

Податливость при повороте и сдвиге основания в формулах (12.6), (12.7) может быть учтена дополнительными слагаемыми  $\tau/K_\varphi + 1/K_z$ .

**Перекрытия.** Единичные перемещения перекрытий на упругом основании (упругое основание жесткостью  $t_2 C_1^{(i)}/L$  моделирует рамный каркас) определяется путем разложения их в ряд по формам собственных колебаний [13]:

$$\delta(y_s, y_p; C_1^{(i)}) = \frac{1}{C_1^{(i)} t_2} + \frac{3V(y_s)V(y_p)}{FC_1^{(i)} t_2} + \frac{\sum_{j=1}^{n_1} V_j(y_s)V_j(y_p)}{I_p \sum_{r=1}^{n_1} a_r^2 C_2^{(i)} t_2}, \quad (12.11)$$

где  $V(y_s)$ ,  $V(y_p)$ ,  $V_j(y_s)$ ,  $V_j(y_p)$  — ординаты форм собственных крутильных и изгибных колебаний перекрытий соответственно в точках  $y = y_s$  и  $y = y_p$ ;  $C_1^{(i)}$ ,  $C_2^{(i)}$  — жесткости толкающих опор рам и перекрытий, определяемые по формулам (11.11) и (11.24);  $t_2$  — число рам каркаса;  $F$ ,  $I_p$  — площадь перекрытия в плане и его полярный момент инерции относительно центра масс;  $a_r$  — расстояние от центра перекрытия до поперечных рам;  $n_1$  — число учитываемых в расчете изгибных форм собственных колебаний перекрытий (в практических расчетах достаточная точность получается при  $n_1 = 2, 3$ ).

Формы собственных крутильных  $V(y)$  колебаний определяются по формуле

$$V(y) = 1 - \frac{2}{L} y, \quad (12.12)$$



а изгибных  $V_j(y)$  — по (11.19) и (11.22) или по табл. 7 приложений. Формула (12.11) с учетом (12.12) и деформации сдвига имеет вид [13]:

$$\delta(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(i)}) = \frac{1}{C_1^{(i)t_2}} + \frac{3(1-2\bar{y}_s)(1-2\bar{y}_p)}{\frac{FC_1^{(i)}}{I_p} \sum_{r=1}^{t_2} a_r^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{4L^3}{\lambda_j^4 [EI]} [V_j(\bar{y}_s) V_j(\bar{y}_p) + 0,5\nu_j \bar{V}_j(\bar{y}_s) \bar{V}_j(\bar{y}_p)], \quad (12.13)$$

где  $\bar{y}_s = \frac{y_s}{L}$ ;  $\bar{y}_p = \frac{y_p}{L}$ ;  $\nu_j = \frac{\lambda_j^4}{\bar{\lambda}_j^2} \cdot \frac{[EI]}{[GF]} \cdot \frac{1}{L^2}$ ;  $V_j(\bar{y}_s)$ ,  $V_j(\bar{y}_p)$  —

ординаты  $j$ -ых форм собственных изгибных колебаний перекрытий (приведены в табл. 4 приложений);  $\bar{V}_j(y_s)$ ,  $\bar{V}_j(y_p)$  — ординаты  $j$ -ых форм собственных сдвиговых колебаний перекрытий, определяемые по формуле  $V_j(y) = \cos \lambda_j y/L$ ;  $\lambda_j$  — частотные параметры изгибных колебаний перекрытий, значения которых даны в (11.18) и (11.21);  $\bar{\lambda}_j$  — частотные параметры сдвиговых колебаний перекрытий, равные  $\bar{\lambda}_1 = 6,283$ ;  $\bar{\lambda}_2 = 9,425$ ;  $\bar{\lambda}_3 = 12,566$ ;  $\bar{\lambda}_4 = 15,708$ ;  $\bar{\lambda}_5 = 18,850$ ; ...;  $[GF]$  — приведенная сдвиговая жесткость с учетом сборности перекрытий.

Экспериментальные данные по определению величин изгибной и сдвиговой жесткостей сборных перекрытий приведены в табл. 9 приложений.

### § 13. ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ В РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ

Напомним, что коэффициенты разрешающих уравнений в общем виде определяются по формулам (8.8), (8.13) и (8.14).

Для зданий повышенной этажности, когда число этажей достаточно велико ( $n \geq 9$ ), а поперечные рамы моделируются условным сдвиговым стержнем, представляется возможность дискретные связи, соединяющие перекрытия и вертикальные элементы, заменить распределенными (континуальными), а также использовать формулы собственных колебаний сдвигового стержня в качестве функций  $X_i(x)$ :

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x;$$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H}; \quad (i = 1, 2, 3 \dots).$$

С учетом этих допущений формулы (8.8) и (8.13) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a_s^{(ii)} &= \int_0^H \left[ \int_0^x \delta_{1s}(x, \tau) \sin \lambda_i \tau d\tau + \int_x^H \delta_{2s}(x, \tau) \sin \lambda_i \tau d\tau \right] \sin \lambda_i x dx; \\ a_s^{(im)} &= \int_0^H \left[ \int_0^x \delta_{1s}(x, \tau) \sin \lambda_i \tau d\tau + \int_x^H \delta_{2s}(x, \tau) \sin \lambda_i \tau d\tau \right] \sin \lambda_m x dx; \end{aligned} \right\} (13.1)$$

$$b_{sp}^{(im)} = \bar{\delta}(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(m)}) \int_0^H \sin^2 \lambda_i x dx, \quad (13.2)$$

где  $\delta_{1s}(x, \tau)$ ,  $\delta_{2s}(x, \tau)$  — функции влияния прогибов вертикальной диафрагмы жесткости с номером  $s$ , определяемые соответственно при  $x \geq \tau$  и  $x \leq \tau$ ;  $\bar{\delta}(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(m)})$  — единичные прогибы перекрытия, жесткость которого и жесткости поддерживающих его упругих опор уменьшены в  $H/n$  раз.

Как видно из формулы (12.11), единичные прогибы перекрытий  $\bar{\delta}(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(i)})$  и  $\delta(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(i)})$  связаны зависимостью

$$\bar{\delta}(\bar{y}_s, \bar{y}_p; C_1^{(i)}) = \frac{H}{n} \delta(y_s, y_p; C_1^{(i)}).$$

**Сплошные диафрагмы.** В уравнения (13.1) подставим значения  $\delta_{1s}(x, \tau)$  и  $\delta_{2s}(x, \tau)$ , определяемые формулами (12.1) и (12.2):

$$\begin{aligned} a_s^{(ii)} &= \int_0^H \left\{ \int_0^x \left[ \frac{\tau^2}{2E_s I_s} \left( x - \frac{\tau}{3} \right) + \frac{k_1}{G_s F_s} \tau + \frac{1}{K_{zs}} + \frac{\tau}{K_{\varphi s}} x \right] \sin \lambda_i \tau d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_0^H \left[ \frac{x^2}{2E_s I_s} \left( \tau - \frac{x}{3} \right) + \frac{k_1}{G_s F_s} x + \frac{1}{K_{zs}} + \frac{x}{K_{\varphi s}} \tau \right] \sin \lambda_i x dx \right\} \sin \lambda_i x dx; \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$\begin{aligned} a_s^{(im)} &= \int_0^H \left\{ \int_0^x \left[ \frac{\tau^2}{2E_s I_s} \left( x - \frac{\tau}{3} \right) + \frac{k_1}{G_s F_s} \tau + \frac{1}{K_{zs}} + \frac{\tau}{K_{\varphi s}} x \right] \sin \lambda_i \tau d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_0^H \left[ \frac{x^2}{2E_s I_s} \left( \tau - \frac{x}{3} \right) + \frac{k_1}{G_s F_s} x + \frac{1}{K_{zs}} + \frac{x}{K_{\varphi s}} \tau \right] \sin \lambda_i x dx \right\} \sin \lambda_m x dx. \end{aligned}$$

Затем преобразуем общее для (13.3) выражение, заключенное в фигурные скобки. Принимая во внимание, что

$$\sin \lambda_i H = \frac{(2i-1)\pi}{2} = (-1)^{i+1}; \quad \cos \lambda_i H = 0,$$

выражение в фигурных скобках приведем к виду

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_i^2} \left( \frac{1}{\lambda_i^2 E_s J_s} + \frac{k_1}{G_s F_s} \right) \sin \lambda_i x + \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^2} \left( \frac{x}{2E_s J_s} + \frac{1}{K_{\varphi s}} \right) - \frac{x}{\lambda_i^3 E_s J_s} + \frac{1}{\lambda_i K_{zs}} \right\},$$

тогда формулы (13.3) запишутся так:

$$\begin{aligned} a_s^{(ii)} &= \int_0^H \left[ \frac{1}{\lambda_i^2} \left( \frac{1}{\lambda_i^2 E_s J_s} + \frac{k_1}{G_s F_s} \right) \sin \lambda_i x + \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^2} \left( \frac{x}{2E_s J_s} + \frac{1}{K_{\varphi s}} \right) - \frac{x}{\lambda_i^3 E_s J_s} + \frac{1}{\lambda_i K_{zs}} \right] \sin \lambda_i x dx; \\ a_s^{(im)} &= \int_0^H \left[ \frac{1}{\lambda_i^2} \left( \frac{1}{\lambda_i^2 E_s J_s} + \frac{k_1}{G_s F_s} \right) \sin \lambda_i x + \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^2} \left( \frac{x}{2E_s J_s} + \frac{1}{K_{\varphi s}} \right) - \frac{x}{\lambda_i^3 E_s J_s} + \frac{1}{\lambda_i K_{zs}} \right] \sin \lambda_m x dx. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Используя свойство ортогональности  $\int_0^H \sin \lambda_i x \sin \lambda_m x dx = 0$ , получим расчетные формулы для коэффициентов  $a_s^{(ii)}$  и  $a_s^{(im)}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_s^{(ii)} &= \frac{1}{\lambda_i^2} \left( \frac{1}{\lambda_i^2 E_s J_s} + \frac{k_1}{G_s F_s} \right) \frac{H}{2} + \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^2 E_s J_s} \left[ H (-1)^{i+1} - \frac{1}{\lambda_i} \right] + \\ &+ \frac{(-1)^{(i+1)}}{\lambda_i^4} \left[ \frac{(-1)^{i+1}}{K_{\varphi s}} - \frac{1}{\lambda_i E_s J_s} \right] + \frac{1}{\lambda_i^2 K_{zs}}; \\ a_s^{(im)} &= \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^2 \lambda_m^2 E_s J_s} \left[ H (-1)^{m+1} - \frac{1}{\lambda_m} \right] + \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_i^2 \lambda_m^2} \left[ \frac{(-1)^{i+1}}{K_{\varphi s}} - \frac{1}{\lambda_i E_s J_s} \right] + \frac{1}{\lambda_i \lambda_m K_{zs}}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

**Диафрагмы с проемами.** Подставим в формулы (13.1) выражения (12.6) и (12.7) для единичных прогибов диафрагм с проемами:

$$\begin{aligned} a_s^{(ii)} &= \int_0^H \left\{ \int_0^x \left\{ \tilde{B}_{0s} \left[ \frac{\text{sh } \chi_s x - [\text{ch } (\chi_s H - \chi_s x) - 1] \text{sh } \chi_s \tau}{\text{ch } \chi_s H} - \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \text{th } \chi_s H + \chi_s (H - x) \right] + \frac{x - \tau}{2B_{0s}} (H - x)^2 + \frac{(H - x)^3}{3B_{0s}} + \frac{1}{K_{zs}} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\tau}{K_{\varphi s}} x \right\} \sin \lambda_i \tau d\tau + \int_x^H \left\{ \tilde{B}_{0s} \left[ \frac{\text{sh } \chi_s \tau - [\text{ch } (\chi_s H - \chi_s \tau) - 1] \text{sh } \chi_s x}{\text{ch } \chi_s H} - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{th} \chi_s H + \chi_s (H - \tau) \Big] + \frac{\tau - x}{2B_{0s}} (H - \tau)^2 + \frac{(H - \tau)^3}{3B_{0s}} + \frac{1}{K_{zs}} + \\
& + \frac{x}{K_{\varphi s}} \tau \Big\} \sin \lambda_i \tau d\tau \Big\} \sin \lambda_i x dx; \quad (13.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_s^{(im)} = & \int_0^H \left\{ \int_0^x \left\{ \int_0^x \left\{ \tilde{B}_{0s} \left[ \frac{\operatorname{sh} \chi_s x - [\operatorname{ch} (\chi_s H - \chi_s x) - 1] \operatorname{sh} \chi_s \tau}{\operatorname{ch} \chi_s H} - \operatorname{th} \chi_s H + \right. \right. \right. \\
& + \chi_s (H - x) \Big] + \frac{x - \tau}{2B_{0s}} (H - x)^2 + \frac{(H - x)^3}{3B_{0s}} + \frac{1}{K_{zs}} + \\
& + \frac{\tau}{K_{\varphi s}} x \Big\} \sin \lambda_i \tau d\tau + \int_x^H \left\{ \tilde{B}_{0s} \left[ \frac{\operatorname{sh} \chi_s \tau - [\operatorname{ch} (\chi_s H - \chi_s \tau) - 1] \operatorname{sh} \chi_s x}{\operatorname{ch} \chi_s H} - \right. \right. \\
& - \operatorname{th} \chi_s H + \chi_s (H - \tau) \Big] + \frac{\tau - x}{2B_{0s}} (H - \tau)^2 + \frac{(H - \tau)^3}{3B_{0s}} + \frac{1}{K_{zs}} + \\
& \left. \left. \left. + \frac{x}{K_{\varphi s}} \tau \right\} \sin \lambda_i \tau d\tau \right\} \sin \lambda_m x dx, \quad (13.7)
\end{aligned}$$

где  $\tilde{B}_{0s} = \frac{\tilde{B}_s}{B_{0s}}$ .

Выполнив ряд преобразований и упрощений, аналогичных тем, какие были сделаны для сплошных диафрагм, получим следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned}
a_s^{(ii)} = & \frac{\tilde{B}_{0s}}{4(\chi_s^2 + \lambda_i^2)} \left\{ \frac{8\chi_s (-1)^{i+1}}{\lambda_i} - 5\chi_s H + [1 - (-1)^{i+1}] \operatorname{th} \chi_s H \right\} + \\
& + \frac{\tilde{B}_{0s}}{2(\chi_s^2 + \lambda_i^2)^2 \operatorname{ch} \chi_s H} \left\{ \chi_s^2 \left[ \frac{3 \operatorname{sh} \chi_s H}{4} - (-1)^{i+1} \left( 1 + \frac{\operatorname{sh} \chi_s H}{2} \right) \right] - \right. \\
& - \frac{\lambda_i^2 \operatorname{sh} \chi_s H}{4} [1 + (-1)^{i+1}] \Big\} + \frac{1}{\lambda_i^2} \left[ \tilde{B}_{0s} \left( \frac{\chi_s H}{2} + \lambda_i H - \operatorname{th} \chi_s H \right) + \right. \\
& + \frac{5H^3}{12B_{0s}} \Big] - \frac{2\chi_s \tilde{B}_{0s} (-1)^{i+1}}{\lambda_i^3} + \frac{H}{2\lambda_i^4 B_{0s}} \left[ 1 - \frac{9(-1)^{i+1}}{4} \right] + \\
& + \frac{1}{\lambda_i^5 B_{0s}} [1 - 2(-1)^{i+1}] + \frac{1}{\lambda_i^2 K_{zs}} + \frac{1}{\lambda_i^4 K_{\varphi s}}; \quad (13.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_s^{(im)} = & \frac{\chi_s \tilde{B}_{0s}}{\lambda_i (\chi_s^2 + \lambda_m^2)} + \frac{1}{\lambda_i \lambda_m} \left[ \tilde{B}_{0s} (\chi_s H - \operatorname{th} \chi_s H) + \frac{H^3}{3B_{0s}} \right] - \\
& - \frac{\chi_s \tilde{B}_{0s} (-1)^{i+1}}{\lambda_m} \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\chi_s^2 + \lambda_i^2} \right) - \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_i \lambda_m^2} \left( \chi_s \tilde{B}_{0s} + \frac{H}{\lambda_i B_{0s}} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\lambda_i \lambda_m^3 B_{0s}} \left[ \frac{1}{\lambda_i} - \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_m} \right] - \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i^4 \lambda_m B_{0s}} + \frac{\lambda_m \bar{B}_{0s}}{\chi_s^2 + \lambda_i^2} \operatorname{th} \chi_i H \left( \frac{1}{\lambda_m - \lambda_i} + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda_m - \lambda_i}{4\chi_s^2 (\lambda_m - \lambda_i)^2} \right) - \frac{4H\lambda_i \lambda_m}{\chi_s^2 B_{0s} (\lambda_m^2 - \lambda_i^2)^2} + \frac{1}{\lambda_i \lambda_m K_{zs}} + \frac{(-1)^{i+1} (-1)^{m+1}}{\lambda_i^2 \lambda_m^2 K_{\varphi s}}.
\end{aligned} \quad (13.9)$$

**Неполный пространственный каркас.** Используя равенство  $\int_0^H \sin^2 \lambda_i x dx = H/2$  и подставляя в формулу (13.2) вместо  $\bar{\delta}$  ( $\bar{y}_s, \bar{y}_p$ ;  $C_1^{(i)}$ ) его выражение с учетом (12.13), получим

$$\begin{aligned}
b_{sp}^{(ii)} = & \frac{H^2}{2n} \left\{ \frac{1}{C_1^{(i)} t_2} + \frac{3(1 - \bar{y}_s)(1 - \bar{y}_p)}{FC_1^{(i)} \sum_{r=1}^{t_2} a_r^2} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{4L^3}{\lambda_j^4 [EI]} \times \right. \\
& \left. \times [V_j(\bar{y}_s) V_j(\bar{y}_p) + 0,5v_j \bar{V}_j(\bar{y}_s) \bar{V}_j(\bar{y}_p)] \right\}. \quad (13.10)
\end{aligned}$$

#### § 14. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГРУЗОВЫХ ЧЛЕНОВ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

С учетом допущений, указанных в предыдущем параграфе, формулы (8.14) для грузовых членов примут следующий вид:

$$b^{(i,q)} = \int_0^H \left[ \int_0^x f_1(x, \tau) \bar{Q}(\tau) d\tau + \int_x^H f_2(x, \tau) \bar{Q}(\tau) d\tau \right] \sin \lambda_i x dx, \quad (14.1)$$

где  $f_1(x, \tau)$ ,  $f_2(x, \tau)$  — функции влияния прогибов поперечной рамы, эквивалентной по жесткости всем поперечным рамам каркаса, определяемые соответственно при  $x \geq \tau$  и  $x \leq \tau$ ;  $\bar{Q}(\tau)$  — интенсивность распределенной (по высоте) всей ветровой нагрузки.

Подставим в формулу (14.1) вместо функций  $f_1(x, \tau)$ ,  $f_2(x, \tau)$ ,  $\bar{Q}(\tau)$  их выражения

$$f_1(x, \tau) = \frac{h}{12t_2} \left( \frac{1}{s_c} + \frac{1}{r_p} \right) \tau \quad (x \geq \tau);$$

$$f_2(x, \tau) = \frac{h}{12t_2} \left( \frac{1}{s_c} + \frac{1}{r_p} \right) x \quad (x \leq \tau);$$

$$\bar{Q}(\tau) = \left( q_1 + \frac{q_2 - q_1}{H} \tau \right) L,$$

где  $s_c, r_p$  — суммарные погонные жесткости стоек и ригелей монотонной по высоте поперечной рамы (в уровне одного яруса);  $q_1, q_2$  — интенсивности ветровых нагрузок в уровне основания и верха здания.

После ряда преобразований и упрощений получим

$$b^{(i\sigma)} = \frac{Lh}{12\lambda_i^2 t_a} \left( \frac{1}{s_c} + \frac{1}{r_p} \right) \left\{ \frac{q_1}{\lambda_i} \left[ 1 - \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i H} \right] + \frac{q_2 (-1)^{i+1}}{\lambda_i^2 H} \right\}. \quad (14.2)$$

#### § 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ НАГРУЗОК НА ПЛОСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАРКАСА

В предыдущих параграфах были получены расчетные формулы для определения коэффициентов канонических уравнений и грузовых членов. Разрешающие канонические уравнения (§ 9) имеют следующий вид:

$$(A + B)\vec{r} + \vec{B}_q = 0, \quad (15.1)$$

где

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_s \\ \vdots \\ \vec{r}_{t_1} \end{pmatrix}; \quad r_s = \begin{pmatrix} r_s^{(1)} \\ r_s^{(2)} \\ \vdots \\ r_s^{(i)} \\ \vdots \\ r_s^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица-столбец групповых неизвестных вертикальной диафрагмы жесткости с номером } s.$$

Решать матричное уравнение (15.1) можно различными способами, используя, например, стандартные программы. Решение с помощью обратной матрицы может быть представлено как

$$\vec{r} = -(A + B)^{-1} \vec{B}_q. \quad (15.2)$$

Групповые неизвестные  $r_s^{(i)}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) связаны с интенсивностями  $r_s(x)$  распределенных по высоте здания усилий взаимодействия между неполным каркасом и вертикальными диафрагмами жесткости следующими зависимостями:

$$r_1(x) = \sum_{i=1}^n r_1^{(i)} \sin \lambda_i x = r_1^{(1)} \sin \lambda_1 x + r_1^{(2)} \sin \lambda_2 x + \dots + r_1^{(n)} \sin \lambda_n x;$$

$$r_2(x) = \sum_{i=1}^n r_2^{(i)} \sin \lambda_i x = r_2^{(1)} \sin \lambda_1 x + r_2^{(2)} \sin \lambda_2 x + \dots + r_2^{(n)} \sin \lambda_n x;$$

$$\dots$$

$$r_s(x) = \sum_{i=1}^n r_s^{(i)} \sin \lambda_i x = r_s^{(1)} \sin \lambda_1 x + r_s^{(2)} \sin \lambda_2 x + \dots + r_s^{(n)} \sin \lambda_n x;$$

$$\dots$$

$$r_{t_1}(x) = \sum_{i=1}^n r_{t_1}^{(i)} \sin \lambda_i x = r_{t_1}^{(1)} \sin \lambda_1 x + r_{t_1}^{(2)} \sin \lambda_2 x + \dots + r_{t_1}^{(n)} \sin \lambda_n x.$$

Для вертикальных диафрагм жесткости усилия  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$ , ...  $r_s(x)$ , ...  $r_{t_1}(x)$  являются расчетными.

Ординаты интенсивности распределенных по высоте диафрагм с номером  $s$  усилий могут быть определены также по матричной формуле

$$\bar{r}_s(x) = \|\sin \lambda_i x_i\| \vec{r}_s \quad (15.3)$$

или как

$$\begin{pmatrix} r_s(x_1) \\ r_s(x_2) \\ \vdots \\ r_s(x_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 x_{11} & \sin \lambda_2 x_{12} & \dots & \sin \lambda_n x_{1n} \\ \sin \lambda_1 x_{21} & \sin \lambda_2 x_{22} & \dots & \sin \lambda_n x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \lambda_1 x_{v1} & \sin \lambda_2 x_{v2} & \dots & \sin \lambda_n x_{vn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_s^{(1)} \\ r_s^{(2)} \\ \vdots \\ r_s^{(n)} \end{pmatrix},$$

где  $v$  — количество участков, на которые разделена эпюра усилий  $r_s(x)$ .

Если эпюра усилий  $r_s(x)$  имеет плавный характер, то  $v$  может быть принято равным числу этажей. Однако числовые расчеты показали, что в верхних этажах эпюра  $r_s(x)$  может менять знак. Поэтому для повышения точности расчета целесообразно число участков в верхней части увеличить (в расчетах можно принимать  $v = n + 2$ ).

Интенсивности распределенных (по высоте здания) усилий взаимодействия  $R(x, y_\alpha)$  между рамой каркаса с номером  $\alpha$  и перекрытиями от воздействия отпора диафрагм можно определить как сумму произведений перемещений перекрытий (от воздействия групповых неизвестных) на жесткости  $C_1^{(i)}$  толкающих упругих опор, моделирующих поперечные рамы, т. е.

$$\begin{aligned} R(x, y_\alpha) = & \sum_{i=1}^n r_1^{(i)} \sin \lambda_i x \delta(y_\alpha, y_1; C_1^{(i)}) C_1^{(i)} + \dots + \\ & + \sum_{i=1}^n r_s^{(i)} \sin \lambda_i x \delta(y_\alpha, y_s; C_1^{(i)}) C_1^{(i)} + \dots + \\ & + \sum_{i=1}^n r_\alpha^{(i)} \sin \lambda_i x \delta(y_\alpha, y_{t_1}; C_1^{(i)}) C_1^{(i)}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Усилия  $R(x, y_\alpha)$  для перекрытий являются расчетными.

При загрузении неполного каркаса (без учета диафрагм) вся ветровая нагрузка равномерно передается перекрытием на поперечные рамы. Интенсивность ветровой нагрузки на одну раму определяется по следующей формуле

$$\tilde{Q}(x) = \left( q_1 + \frac{q_2 - q_1}{H} x \right) \frac{L}{t_2}. \quad (15.5)$$

Интенсивность расчетных усилий на поперечные рамы получим как разность усилий  $\tilde{Q}(x)$  и  $R(x, y_\alpha)$ , т. е.

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) - R(x, y_\alpha). \quad (15.6)$$